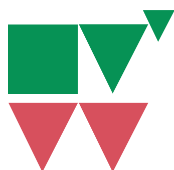
# EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

'IK ZOU HET PUNT GEVEN'
FORMULES IN WISKUNDE-EXAMENS
ANALYSE VWO WISKUNDE B
EEN GOED BEGIN. . .
JAARVERGADERING/
STUDIEDAG 2013

NR.1



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 89 | SEPTEMBER 2013

# INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 89 NR.1

## IN DIT NUMMER

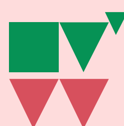


ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN









## KORT VOORAF

Wellicht heeft u de vakantietijd benut om weer met hernieuwde energie en een opgepoetste uitstraling het schooljaar te starten. Dan hebben we iets gemeenschappelijks. Want we hadden het voor de vakantie al beloofd en nu ligt hij dan bij u in de bus: de compleet vernieuwde *Euclides*. Voor het eerst in meerkleurendruk en met een hedendaagse uitstraling. We zijn er trots op. Het geeft ons energie om u de komende jaargang weer zoveel mogelijk te informeren, inspireren en activeren.

Dat doen we met een redactie die is uitgebreid met twee nieuwe leden: Sietske Tacoma en Nathalie Kuijpers, beide werkzaam op het Freudenthal Instituut. Sietske houdt zich onder andere bezig met de Digitale Wiskunde Omgeving en u kent haar misschien ook van de organisatie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Nathalie gaat ons ondersteunen bij de eindredactie waarmee ze veel ervaring heeft vanwege vergelijkbare werkzaamheden voor de *Nieuwe Wiskrant*.

Naast uw verenigingsblad is ook de website van de NVvW vernieuwd; ik nodig u van harte uit om er een kijkje te nemen – en alvast in te schrijven voor de studiedag op **9 november.** Ook de digitale versie van *Euclides* vindt u hier, met onder andere een uitgebreid examenartikel van het Cito.
Veel lees- en kijkplezier.

Marjanne de Nijs
Hoofdredacteur *Euclides*

# ‘IK ZOU HET PUNT GEVEN’

## VERSLAG VAN HET EXAMENFORUM

Erik Korthof

Om te beginnen iets over het examenrooster. Het CvE keerde na twee jaar weer terug naar het stramien van 2010: alle havo-examens op dezelfde dag, alle vwo-examens op dezelfde dag. Dat is, zo stelde iemand in het Algemeen Forum, vervelend voor leerlingen die zowel een A- als B-examen willen afleggen. Echter: een regulier examen in zowel A als B is wettelijk niet toegestaan, want per profiel mag je maar één wiskundevak kiezen. Alleen door een constructie via het staatsexamen is het mogelijk een extra certificaat voor een tweede wiskundevak te bemachtigen. Ondertussen was het als corrector wèl veel werk tegelijk, als je bij havo of vwo twee van de wiskundevakken gaf.

**De helft meer** – Dit jaar zijn er geen regionale examenbesprekingen geweest, ook al omdat Pinksteren de adequate organisatie daarvan belette. In plaats daarvan is in april een aantal regionale cursussen examencorrectie gehouden, waar weer bleek dat collega’s graag in gesprek gaan rond elkaars mening ten aanzien van de toepassing van de correctievoorschriften. Het examenforum bevestigt de grote behoefte aan deze onderlinge collegiale raadpleging. Misschien wel door de afwezigheid van de regionale besprekingen nam het aantal reacties in het examenforum toe van zo’n 1200 vorig jaar naar een kleine 1800 dit jaar! Hieronder volgt een beeld van wat er allemaal aan vragen, opmerkingen, standpunten en meningen in de fora naar voren kwam. Ik laat de conclusies graag aan de lezer over, in de meeste gevallen.

### Havo wiskunde A

In de openingsopgave *De huisarts* gaf vraag 4 veel nakijkwerk (***zie figuur 1***). ‘Er gaan veel dingen mis bij deze vraag’, verzucht één van de collega’s. De leerlingen konden aan de slag met het opstellen van een vergelijking op basis van het inzicht $H_T = \frac{1}{2}H$ of $H_M = H_T - H_V$ en dan gaat er natuurlijk van alles de mist in. Veel leerlingen doen wel iets in de trant van de laatste drie bolletjes van het CV (***zie figuur 2***), maar dan vaak helemaal niet meer met de bedoelde vergelijking. Als men bijvoorbeeld $H_T = H_V$ oplost, moet je het getoonde onbegrip dan nog met drie van de vijf punten belonen? Wanneer is ‘sprokkelen’ nog reëel? Dit bekende probleem, dat ook jaarlijks speelt bij het berekenen van groeifactoren (vraag 15), is op de cursus examencorrectie in Veenendaal en in diverse topics in de fora veelvuldig besproken, maar het bleek moeilijk een consensus te vinden.

**Gooien met een dobbelsteen, dat kennen we wel!** - De kansopgave *Eerlijk spel?* begint met een vraag die in vrijwel elk boek bij de start van het onderwerp kansrekening voorkomt: ‘Toon aan dat de kans om met twee dobbelstenen niet-dubbel te gooien $\frac{5}{6}$ is.’ Dat is voor sommige leerlingen zo triviaal, dat ze het in één stap, met de complementregel, laten zien: $P = 1 - \frac{1}{6}$. Of was dat laatste naar het antwoord toerekenen?
Bij vraag 6 moet het antwoord berekend worden met $\left(\frac{5}{6}\right)^5$, maar wat doe je als een leerling dat noteert zonder haakjes? Is dat een verschrijving die een punt kost, of mag je (met een zijdelingse blik naar de vmbo-correctieregels) zo’n notatiefout door de vingers zien omdat de bedoeling duidelijk is? Trouwens, wat is het verschil tussen een verschrijving en een notatiefout en wanneer wordt een notatiefout een echte verschrijving? En: bijvoorbeeld op de nieuwste Casio tik je in de math-inputmode $\frac{5}{6}^5$ in voor de gevraagde berekening!
Bij vraag 7, ‘Vul de (kans)tabel (...) in en bereken de verwachtingswaarde’, kwam het College voor Examens zichzelf tegen. In het CV stonden aanvankelijk drie punten voor het *berekenen* van de kansen, maar dat werd niet gevraagd. In een aanvulling op het CV werd dit gecorrigeerd: het *invullen* op zich was voldoende.
Het antwoord op de telvraag 8 (***zie figuur 3***) kwam neer op ‘10 keer Q’ of ‘11 letters: bij de eerste 10 letters 9 keer Q en 1 keer P, de laatste een Q’, maar juist niet ‘11 letters met 1 keer P en 10 keer Q’. Het toepassen van het CV bleek hier voor veel discussie vatbaar. Het was ook verwarrend, mede door een opmerking in het CV en na het advies van de centrale bespreking: $\binom{11}{1}$ mocht (maximaal) twee punten opleveren, maar $\binom{11}{1}+1$ ook.

**Rekenvoorbeelden te over** – Bij de opgave *Ontslagvergoeding* bij vraag 11, ‘Geef een rekenvoorbeeld’, was één van de verzuchtingen in het forum: ‘Absoluut geen fijne vraag; zullen we de makers vragen om uit te rekenen wat de kans is dat er twee leerlingen in Nederland hetzelfde rekenvoorbeeld kiezen?’ Je had als corrector maar al die verschillende mogelijkheden steeds na te rekenen! Maar die werden dan weer verluchtigd door zaken als: ‘Je krijgt wel bizarre antwoorden van mensen die werken van hun tiende jaar tot en met hun negentigste!’ Sommige leerlingen zetten er nog opmerkingen bij van ‘arme stakker’, en ‘hebben deze mensen geen pensioen?’

**Kansen, in hoeveel decimalen?** – Bij de kansopgave *Centenarians* kwam iets opvallends (weer) aan het licht: de vraag in hoeveel decimalen nauwkeurig je kansen dient uit te rekenen. *Getal en Ruimte* houdt het consequent op drie, en dat stampen sommige collega’s er dan flink in.

Volgens het CV was bij vraag 13 het antwoord 0,0003 (of nauwkeuriger). Dat is dan tamelijk verwarrend voor enkele G&R-leerlingen, die dan ook 0,000 noteerden. ('Minder stampen, dus', aldus een andere collega...). De vraag zelf gaf geen enkele nadere indicatie over het aantal decimalen, maar de gegeven kansen waren in twee decimalen. In de syllabus staat hierover: '(Er) zal bij vragen op het centraal examen worden aangegeven in welke nauwkeurigheid een antwoord dient te worden gegeven of er zal genoegen worden genomen met antwoorden in uiteenlopende aantallen decimalen.' Het CvE verklaarde desgevraagd, dat hier daarom inderdaad 0,00 of 0,000 goed gerekend mag worden...
In vraag 20 wordt ook een kans gevraagd - het antwoord volgens het CV: 0,70 (of nauwkeuriger). Is 0,7 dan ook nog goed? De discussie bij vraag 13 en 14 herhaalt zich:
'Geef me dan eens één argument waarom de leerling moet weten dat het antwoord minstens twee decimalen moet hebben? De leerling weet toch niet dat dit in het CV wordt geëist?'
'Er zou dus een afspraak moeten zijn om kansen altijd minimaal op een bepaald aantal decimalen te berekenen TENZIJ anders aangegeven. Maar bij afwezigheid van zo'n afspraak kun je het niet fout rekenen. Wat doet de leerling immers fout?'
'Waar is de tijd gebleven waarbij we de uitkomsten van kansen met drie cijfers achter de komma opschreven?'
'Dat hangt helemaal van de lesmethode af. G&R doet kansen op drie decimalen, maar MW op één.'
Het CvE, hierover geraadpleegd, stelt dat in vraag 20 (net als in vraag 14) in de context steeds sprake is van kansen in twee decimalen, dan wel hele procenten, wat de nodige duidelijkheid moet verschaffen.

**Afwijken, ook van het CV?** – Bij de opgave *Lantaarnvisjes* kwam in vraag 20 voor: 'minder dan 20% (afwijkend) van de gemiddelde lengte'. Die gemiddelde lengte was 5,5 cm, dus bedoeld wordt het interval <4,4 ; 6,6>. Een aantal leerlingen neemt die afwijking eenzijdig: <4,4 ; 5,5>. Weer anderen denken dat het 10% links en 10% rechts moet zijn: <4, 95 ; 6,05>. Als daarna nog verder correct met de normaleverdelingsfunctie van de GR gerekend wordt, mag je die punten uit het CV dan nog sprokkelen? Nog mooier werd het bij enkele andere leerlingen: '(...) die 20% lezen als een oppervlakte van 20% rechts en links van het gemiddelde. Ze zoeken de bijbehorende grenzen op. Tot slot rekenen ze uit wat de kans is dat de lengte hiertussen zit. Ze vinden (verrassing!) dat dit 0,400 moet zijn.' Hoe tel je hier de punten? Eén collega huldigt het standpunt: '(...) ik (vind) het fair als (...) deelpunten in uitwerkingen gehonoreerd worden. (...). Dan beloon ik het getoonde inzicht in de soort techniek die voor het oplossen gebruikt moet worden en het succesvol kunnen hanteren van deze wiskundetechnieken.' De volledige reactie vindt u in het eindexamenforum havo wiskunde A bij vraag 4 en 19.

## Havo wiskunde B

Over het algemeen was het oordeel over het havo wiskunde B-examen positief. Hier en daar was er wat teleurstelling over de gonio of de ruimtemeetkunde.

**Wel of geen eenheid vermelden?** – Bij vraag 1 moest de intensiteit $F$ van een tornado met een formule berekend worden, waarbij gegeven was dat $F$ werd afgerond op een geheel getal. Het CV schreef voor dat dan eerst het onafgeronde getal dat de formule opleverde op papier moest staan en daarna de afronding diende plaats te vinden. Betekent dat, dat je bij iemand die het onafgeronde getal zelf niet vermeldt een punt moet aftrekken of is zo'n tussenstap alleen bedoeld om aan te geven dat je iemand die niet verder komt dan het onafgeronde getal daarmee nog kunt belonen? Collega's blijken regelmatig naar de laatste stapel-interpretatie te grijpen.
Vraag 2 draait de zaak om, wat levert de op gehelen afgeronde waarde $F = 4$ minimaal op voor de windsnelheid $v$? Daar moeste leerlingen gaan rekenen met 3,5. De discussie over de toevoeging 292,5 km/h aan het juiste antwoord $v = 81,3$ (zonder m/s, het ging over de minimale waarde) leverde een discussie op het scherp van de snede op.
Bij vraag 3 leverde het substitueren van de ene formule in de andere een lineair verband op, waarvan de parameters moesten worden berekend. Uit de bijdragen in het forum blijkt een grote variëteit aan mogelijke oplossingen en creativiteit van de leerlingen. De mooiste vond ik om op de GR de formules bij $y_1$ en $y_2$ in te vullen en dan $y_3 = y_1 ( y_2 )$ te plotten. Met CALC value $x = 0$ en CALC dy/dx $x = 0$ heb je de antwoorden.

De 'algebraïsch'/'exact'-opgave *Wortel en parabool* leverde een groot aantal posts op. Bij het 'kwadrateren – controleren' bij vraag 4 vergaten veel leerlingen natuurlijk het dubbele product, en hoe streng moet je dan verder zijn? Het 'controleren' werd in de normering niet genoemd, wat veel collega's die hun leerlingen daarop flink getraind

Als de stijging van het totaal aantal huisartsen en van het aantal vrouwelijke huisartsen zich op dezelfde manier voortzet als in de formules voor $H_T$ en $H_V$ is beschreven, komt er een moment dat er evenveel vrouwelijke als mannelijke huisartsen zullen zijn.
4 Onderzoek in welk jaar dat zal zijn.

figuur 1 Uit: havo A 2013 (De huisarts)

4 **maximumscore 5**
- De vergelijking $106 \cdot t + 1078 = \frac{1}{2} \cdot (107 \cdot t + 6703)$ moet worden opgelost 2
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- De oplossing: $t \approx 43,3$ 1
- Dat is in het jaar 2033 1

figuur 2 Uit: correctievoorschrift havo A 2013 (De huisarts)

Peter en Quinten besluiten het spel te spelen totdat één van hen 10 punten heeft.
Voorbeelden van een spelverloop waarbij Peter wint, zijn
Q-P-Q-Q-Q-Q-Q-P en P-Q-Q-Q-P.
Een voorbeeld van een spelverloop waarbij Quinten wint, is
Q-Q-Q-Q-P-Q-Q-Q-Q-Q-Q.
8 Bereken hoeveel verschillende spelverlopen er zijn waarbij Quinten wint.

figuur 3 Uit: havo A 2013 (Eerlijk spel?)

hadden, speet, maar dan vooral omdat de leerlingen het toch weer vergeten waren.
Bij vraag 6 moest een lengte exact berekend worden, $\sqrt[4]{8} - \sqrt{2}$, maar natuurlijk waren er weer leerlingen die in deze zespunter al dan niet voortijdig de GR pakten en gingen afronden. Er was vooral discussie over de vraag of er wel tussen haakjes ≈ 0,27 aan het exacte eindantwoord mocht worden toegevoegd. Geldt dan regel 3.5, alleen het eerste antwoord telt? Kon je dan zeggen dat zo'n leerling in ieder geval die lengte ook exact heeft berekend of moet je dan een punt aftrekken?

De meetkundeopgave *Hearst Tower* werd als niet moeilijk gekwalificeerd. Vraag 7: 'Toon met berekeningen aan dat deze twee afmetingen uit de gegevens volgen' (***zie figuur 4***) werd door sommige collega's en leerlingen geïnterpreteerd als 'Toon met berekeningen aan dat deze twee afmetingen juist zijn', met andere woorden: er werd teruggerekend, of er werd uitgegaan van de ene afmeting om de andere te berekenen zonder die ene zelf af te leiden uit de gegevens. Dat was uiteraard niet de bedoeling, maar hoe tel je dan de punten?

**Algebraïsch inklemmen?** – Bij de opgave *Olie* moest een (discreet) jaartaal 'op algebraïsche wijze' met behulp van een (continu) exponentieel groeimodel worden berekend. Veel leerlingen konden de verleiding niet weerstaan op de één of andere manier te werken met 'inklemmen', bijvoorbeeld met een tabel. Is dat 'algebraïsch' in de zin van: 'stap voor stap, zonder gebruik te maken van de specifieke opties en de grafische mogelijkheden van de GR?'
Als een leerling de juiste exponentiële vergelijking opschrijft (***zie figuur 5***) en daarmee met de GR verder werkt, is dat voldoende 'algebraïsch'? Is discreet oplossen van een vergelijking met continue variabelen überhaupt algebraïsch? Het verleidde iemand in het forum vanwege die 'specifieke opties van de GR' tot een nieuws soort definitie van 'algebraïsch'; 'Leerlingen van het vmbo hebben inklemmen aangeleerd als een correcte wiskundige manier om een vergelijking op te lossen. Zij hebben op het vmbo niet leren werken met een GR en dus is inklemmen per definitie algebraïsch'. Ik vond het tegenargument: 'Volgens mij zijn het hier toch echt havo-leerlingen en hebben ze twee jaar de tijd gehad om aan de GR te wennen' wel heel terecht. Overigens gaf het berekenen van het 'jaar waarin...' in vraag 12 en 13 weer de nodige discussie over het afronden naar boven of beneden en het eventueel goed rekenen van een vorig of volgend jaartal, maar dat is nu al zo vaak aan de orde geweest. Het juiste antwoord was in dit geval voor mij niet voor discussie vatbaar.

**'Algebraïsch', maar wanneer en tot waar precies?** – De opgave *Grafiek van een logaritme* leverde ook weer vragen rond de 'algebraïsche wijze' op: als je zo in vraag 14 een vergelijking van een lijn door de snijpunten van de grafiek met *x*- en *y*-as moet opstellen, geldt die 'a.w.' dan ook voor het berekenen van die snijpunten of alleen voor het berekenen van de parameters van de lijnformule, c.q. alleen het opstellen? En als je in vraag 15 de helling van die grafiek, maar dan zònder 'algebraïsche wijze', moet bepalen: hoe doe je dat ook alweer als je niet geleerd hebt om een logaritmische functie te differentiëren? Dan blijkt de GR voor sommige leerlingen ineens ver weg.
De gonio-vraag was van een standaardvorm: van een gegeven sinusoïde de parameters van de formule $y = a + b \cos (c\,(x - d))$ bepalen. Probleem 1: *Moderne Wiskunde* heeft het dan over $y = a \cos b\,(x - c) + d$. Probleem 2: Leerlingen schrijven de formule op, maar niet in het gevraagde antwoordformat: $a = ...$, $b = ...$ enz. Zo kan een niet echt moeilijke vijfpunter toch nog puntverlies opleveren, althans bij sommige collega's.

**En natuurlijk: afronden!** – Afronden blijft dus altijd vragen bij leerlingen en collega's oproepen, vooral als er bij voorbeeld in vraag 17 en 19 gevraagd wordt om dat 'in $cm^3$ nauwkeurig' of, in vraag 9, 'in duizenden $m^3$ nauwkeurig' te doen. Bedoelen ze dan 'in *hele* $cm^3$' of 'in een *geheel aantal* duizenden'? De meningen van de collega's waren hierover niet eensluidend. Het CvE zorgt hier zelf misschien ook voor verwarring, omdat er in het vwo wiskunde B-examen bij vraag 12 wèl staat 'in een **geheel** aantal $cm^3$'.

De uitsmijter, een ruimtemeetkundevraag over een lichaam dat bestond uit een halve cilinder met een prisma, bevatte ook weer het tekenen van een uitslag; dat was dit keer geen eenvoudige. Het tekenwerk van de leerlingen riep dan ook veel vragen bij hun leermeesters op. Dan blijkt dat er op dit punt ook weinig over de juiste aanpak is voorgeschreven in syllabi of dergelijke. Citaat: 'Examenmakers; hier ligt een taak om te zorgen dat deze termen in ieder geval bij de docenten goed bekend zijn', waarbij naast het tekenen van uitslagen ook gedoeld werd op het afronden.

## Vwo wiskunde A en C

Bij het examen vwo wiskunde A werden in het forum veel klachten over de lengte geuit: 'Vooral de hoeveelheid tekst vond ik om u tegen te zeggen' en 'Het aanbieden van een context bij wiskundeopgaven is van een nuttig hulpmiddel zo zoetjes aan verworden tot een doel.' Maar of 'Wij als wiskundedocenten willen vooral wiskundige kennis, vaardigheden en inzicht toetsen' helemaal geldt voor wiskunde A en C valt nog te bezien!
Er werd gemeld, dat veel leerlingen tot het eind toe doorwerkten; in een aantal gevallen kwamen ze niet of nauwelijks aan de laatste opgaven toe, terwijl vraag 19 t/m 21, 17 van de 83 punten waard waren. Ook ontbrak zo de tijd voor reflectie. Ook bij wiskunde C klonk dezelfde klacht. Het waren examens met een grote variëteit aan onderwerpen, waarin je je dan steeds weer moest inlezen: bij WA lichaamsoppervlak, beleggen, dialecten,

voetbalplaatjes en atletiek. Formules van Dubois, Mosteller, Haycock, eenmaandsrendement, Hammingafstand en het berekenen van de punten bij de zevenkamp. Toch respect voor de examenmakers dat ze steeds weer onderwerpen weten te vinden waaraan ze vragen kunnen koppelen, waarbij die vragen op zich goed aansluiten bij de stof en deze ook redelijk dekken.

Wat in dit examen opviel, was dat het hier bij procenten vaak om twee decimalen ging, daar waar het in de boeken (ook bij havo) meestal standaard één decimaal is. In het havo A-examen wordt echter vaak uitsluitend met gehele procenten gewerkt, tot in de beantwoording toe.
Een opmerkelijke constatering in het forum was dat in wiskunde A vraag 9 verschillende lettertypes werden gebruikt voor dezelfde A, B, C en ook voor het cijfer 1, iets wat voor dyslectici niet erg prettig is.

**Groeisnelheid of helling?** – Bij WA vraag 3 werd gevraagd om de betekenis van de afgeleide waarde in de concrete situatie van de context te geven: ‘Bij een gewicht van 66 kg groeit het lichaamsgewicht met een snelheid van 0,0116 $m^2$ / kg’. Dat leverde een recordaantal posts op, met verzuchtingen als ‘dramatisch’, want weinig leerlingen bleken zich van de bedoelde terminologie te (kunnen) bedienen. Dus was er veel collegiaal overleg nodig om uit te vinden wat nog wel en wat niet kon. Helling, snelheid, een analogie met marginale kosten, en natuurlijk de noodzaak van het vermelden van ‘per kg’, het werd allemaal uitvoerig besproken, en er werd over van mening verschild…

**Het verschil tussen ‘Laat zien’ en ‘Toon aan’** – Bij WA vraag 5 stond: ‘Laat zien dat… ongeveer 2,44% geweest zou zijn’ en het CV gaf aan, dat zowel vanuit de gegevens in de context naar die 2,44% toe mocht worden gerekend als, omgekeerd, van die 2,44% mocht worden uitgegaan. Daar raakten enkele collega’s nogal ontstemd over, want bij havo wiskunde B, vraag 7 was de vraag ‘Toon aan dat deze afmetingen uit de gegevens volgen’ en daar mocht het omgekeerde niet. En dus vulde het forum zich hier met het elkaar uitleggen waarom deze vragen verschillend, of juist niet, waren. Het antwoord van CvE op de aantoon-vragen 3 en 15 bij Wiskunde C (zie hieronder) maakt het er niet gemakkelijke op.

**Slimme leerlingen** – Bij de kansopgave *Voetbalplaatjes* kwam het bekende omstreden probleem rond het noteren van de te berekenen kansen weer om de hoek kijken, daar waar leerlingen geneigd zijn om direct en alleen binom ($n$, $p$, $x$) op te schrijven (wat ook gold voor vraag 21 met normalcdf ($l$, $r$, $\mu$, $\sigma$)). Bij de hypothesevraag 15 ontbrak verder vaak het ordentelijk noteren van de hypothesen, maar vooral ook van de toevalsvariabele en de parameters, en natuurlijk de conclusie. De ene collega nam het hierbij minder nauw dan de ander.
Opmerkelijk bij deze vraag is dat oudere Casio’s en TI’s (wèl toegestaan, ze ‘voldoen nog’) de binomiale kans met $n = 1240$ niet aankunnen: er moet dan overgestapt worden op een normale benadering, met continuïteitscorrectie.
Erg aardig was dat bij WA vraag 17 / WC vraag 14, het onderzoeken van de beste opstelling, leerlingen met een verrassende oplossing kwamen door te kijken naar het verschil tussen aanval- en verdedigingscijfers. Een strategie die eerst aarzelend in het forum werd besproken maar ten slotte voor deze situatie als absoluut valide bewezen werd.

**Wiskunde C vergeleken met wiskunde A** – Het examen wiskunde C vertoonde opmerkelijk minder overlap met wiskunde A dan vorig jaar. Toen betrof het ongeveer de helft van de vragen, nu waren het er maar 5 van de 21. Alleen *lichaamsoppervlak*, *dialecten* en *voetbalplaatjes* passeerden hier, maar dan met deels andere vragen dan bij WA, ook de revue. Daarnaast kwamen de onderwerpen *DNA-bewijs* en *Overlevingscurven* aan de orde. Heel vaak worden C-leerlingen een stap verder naar het antwoord geleid dan de A-leerlingen.

Het aantal leerlingen bij wiskunde C is zoals bekend beperkt. Het aantal posts over vragen uit het examen wiskunde C was dat navenant ook. Bij de centrale bespreking was het aantal opmerkingen over het CV wiskunde C eveneens niet groot.

**Hearst Tower**

In 2006 is in New York de Hearst Tower gebouwd op de plek waar sinds 1928 het Hearst Building staat. Bij de bouw van de Hearst Tower zijn alleen de buitenmuren van het Hearst Building blijven staan.

De Hearst Tower heeft een plat dak en is 182,0 m hoog.

De gehele toren bestaat uit drie delen. Het onderste deel is het oude gebouw. Daarbovenop zit een laag die de vorm heeft van een balk. De hoogte van deze laag en het oude gebouw samen is 33,8 m. Van het bovenste deel van de toren bestaan de verticale wanden uit even grote gelijkzijdige driehoeken. Er staan negen lagen van zulke driehoeken op elkaar. Zie de foto.

foto



Uit deze gegevens volgt dat de hoogte van zo’n gelijkzijdige driehoek ongeveer 16,5 m is en dat de zijden van deze driehoek ongeveer 19,0 m lang zijn.

4p 7 Toon met berekeningen aan dat deze twee afmetingen uit de gegevens volgen.

figuur 4 Uit: havo B 2013 (Hearst Tower)

**12 maximumscore 4**

- De vergelijking $500 \cdot 1{,}034^t = 750$ moet worden opgelost 1
- Dit geeft $1{,}034^t = \frac{750}{500}$ $(= \frac{3}{2})$ 1
- Dus $t = \dfrac{\log \frac{750}{500}}{\log 1{,}034} \approx 12{,}1$ (of $t = {}^{1{,}034}\log \frac{750}{500} \approx 12{,}1$) 1
- Dus in 1993 passeerde de totale hoeveelheid verbruikte olie de grens van 750 miljard vaten 1

figuur 5 Uit: correctievoorschrift havo B 2013 (Olie)

Bij WC vraag 9 en 16 moesten waarden uit een grafiek afgelezen worden om tot een lineair verband te komen. Het CV gaf marges die daarbij getolereerd mochten worden. Uit het forum blijkt dat zowel die marges als met name de presentatie van de grafieken niet met enthousiasme werden begroet, ook al omdat de leerlingen daardoor minder nauwkeurig konden aflezen.

**'Toon aan' in twee varianten** – Wiskunde C vraag 3 bij *Lichaamsoppervlak* luidt: 'Toon aan dat het minimale lichaamsgewicht van de 10% zwaarste meisjes van 4,5 jaar oud ongeveer 22,2 kg is. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.' en dat gaf aanleiding tot vragen aan de Examenlijn, omdat niet duidelijk zou zijn wat er in deze dubbele vraag nu in twee decimalen uitgerekend zou moeten worden en 'aantonen' om 'een redenering en/of berekening vraagt waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.' Kan je dan ook uitgaan van die 22,2 kg en die 10% in twee decimalen berekenen?
Volgens het CvE moest er iets aangetoond worden over het minimale gewicht, waarvan een benadering ('ongeveer') gegeven is. Dus dat was voor het CvE duidelijk. Maar niet voor collega's die keken naar de formulering van vraag 15 'Toon aan dat ... met ongeveer 4,03% per maand groeide', maar dan zonder toevoeging 'geef je antwoord...'. Daar mocht zowel 'heen' als 'terug' gerekend worden.

## Vwo wiskunde B

Het examen vwo wiskunde B werd in het forum als niet moeilijk ervaren. Differentiëren en integreren bleven tamelijk elementair, er was opnieuw geen opgave over een parameterkromme en de meetkunde werd door iemand getypeerd als 'aan-de-hand-nemerij.'
Op de Centrale Examenbespreking bestond niet veel aanleiding om iets aan het CV toe te voegen: een half A4'tje met ongeveer over de helft van de vragen een advies. In het forum bleek dat er méér problemen waren, die om collegiale adviezen vroegen.

**Veel bezochte topics: vraag 1, 2, 3, 4** – De eerste opgave *De vergelijking van Antoine*, ging over een formule die verband legt tussen dampdruk en temperatuur van een vloeistof in een gesloten ruimte. Voor aceton golden in de formule drie parameters die elk in vier significante cijfers gegeven waren, respectievelijk in gehelen, in twee en in drie decimalen, allemaal bij benadering (***zie figuur 6***). Maar daar mocht dan toch in vraag 1 op algebraïsche wijze mee gerekend worden, waarna het berekende antwoord weer afgerond moest worden. Dus waren er collega's (enkele gaven ook natuurkunde) die deze vraag hekelden, ook al omdat per discipline de aanpak verschilt, wat verwarrend is voor bètaleerlingen, en blijkens de reacties in het forum ook voor docenten.
Vraag 2, waarin geredeneerd moest worden, leverde één van de meeste posts in dit forum op (***zie figuur 7***). Dat zat hem ook in het feit dat leerlingen vaak sneller tot conclusies komen dan het CV wenst, maar tevens dat de manier waarop de redenering wordt opgeschreven nogal kan variëren en dan de nodige vraagtekens oproept.
Bij vraag 3 moest een afgeleide waarde worden berekend, en dat bleek ook via een raaklijn aan de bij deze opgave afgedrukte vrij nauwkeurige grafiek (***zie figuur 8***) redelijk precies te kunnen, iets wat het CV niet noemde, maar door meerdere collega's (mits controleerbaar genoteerd) wel werd geaccepteerd. De *Vierkanten* van vraag 5 t/m 8 leverden naar verhouding veel minder posts op; de goniometrie bij deze vragen leek goed te doen. Alleen bij vraag 8 kwamen er meer opmerkingen om de hoek kijken. Enkele ervan zijn een pleidooi in het voordeel van dyslectici: schrijf **1+ sin α** in plaats van **sin α + 1**, omdat dat laatste soms gelezen wordt als **sin (α + 1)**.

**Variaties in berekenen** – Bij vraag 8 staat de formulering: 'Bereken met behulp van differentiëren .... Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.' Bij vraag 1 was het 'Bereken op algebraïsche wijze.... Rond je antwoord af op...', zoals dat later ook in vraag 11 staat. Vraag 12 luidt: 'Bereken met behulp van primitiveren. Geef je antwoord in een geheel aantal $cm^3$.' Daarnaast zijn er drie vragen waarin zonder meer staat: 'Bereken exact...' en drie vragen, waarin staat: 'Bereken...' zonder enige verdere beperking. Er zijn ook een paar vragen waarin gevraagd wordt iets 'op algebraïsche wijze' aan te tonen.
Leerlingen pakken soms (te) snel hun GR, maar ook collega's zijn het er niet altijd over eens (vanaf) wanneer de GR kan worden ingezet en nog minder hoe je het moet waarderen, als een leerling toch de GR gebruikt waar dat niet had gemogen. Inmiddels heeft het CvE de lijst Examen(werk)woorden gepubliceerd, waarin een aantal uitdrukkingen, en daarbij het al of niet toestaan van de GR, eenduidig zijn omschreven.
Toch blijkt uit steeds terugkerende verschillen van inzicht op deze punten, dat er nog altijd onbekendheid, onduidelijkheid en verwarring bestaat. Een collega formuleerde het zo: 'Het gaat bij het CE niet meer om de wiskunde, maar om het juist inschatten van het moment wanneer de GR gebruikt moet worden.'
Als ik hier mijn mening zou mogen geven, dan vind ik dat het CvE ook wat betreft de vraagstelling eens een aantal standaardformuleringen (zoals hierboven) op een rijtje zou moeten zetten met daarbij duidelijk uitgewerkte voorbeelden hoe men dan de beantwoording verwacht en de puntenwaardering ziet. Elke docent kan dat natuurlijk zelf ook doen door de examens en CV's uit te vlooien. Zoveel variatie zit er niet in de vraagstelling en er is redelijk sprake van eenduidigheid, zou je zeggen.

**Meevallende meetkunde** – De vlakke-meetkundevragen, met de beruchte lastig te corrigeren bewijzen, vielen dit jaar dus nogal mee. Zelfs zo dat leerlingen bijvoorbeeld bij vraag 9 bij het bewijs dat een driehoek gelijkzijdig is, deze conclusie al snel en begrijpelijk trokken nadat ze bewezen hadden dat er twee hoeken 60° waren. Alleen, die stelling staat niet in het repertoire waar ze zich op

mochten beroepen. Ook was hier de verleiding groot om de toegestane stelling '*boog en koorde*' te vervangen door de niet in de lijst genoemde stelling '*omtrekshoek en koorde*', want dat van gelijke omtrekshoek de bijbehorende bogen en dus koorden even groot zijn, die 'zie je zo'.

**Algebraïsch, en dan toch plotten?** – *Nulpunten, extremen en buigpunten* de vragen 15, 16 en 17, dat was natuurlijk weer algebraïsch en exact. Alleen: extremen bepalen, dat doen de boeken door de afgeleide te bepalen, de nulpunten ervan te berekenen en via een plot op de GR een schets te maken om de extremen en hun aard te kunnen vaststellen. Op een examen is de formulering dan meestal: 'Bereken met de afgeleide...' of is bijvoorbeeld de grafiek gegeven of wordt gevraagd een specifiek benoemd maximum of minimum te berekenen. Zo wordt, als het 'algebraïsch' moet, de GR-plot omzeild. Maar in vraag 16 verschijnt ineens de opdracht om algebraïsch aan te tonen dat er *geen* extremen zijn. De in de opdracht al gegeven afgeleide blijkt nooit negatief, één keer 0, dus is de functie is altijd stijgend (domein Bb: 9.5). Dat kan ook hier zonder plot vastgesteld worden! Vele collega's raken hier echter bijna in paniek, omdat ze, letterlijk volgens het boek(je), de leerlingen nog zo geleerd hebben om extremen via een plot en schets op te sporen. Maar er is toch echt een verschil tussen 'bepaal de extremen' en 'toon aan dat er geen extremen zijn.'
De uitsmijter was een tekenvraag. Geen 'construeer', maar 'teken', met toelichting. 'Tekenen' houdt het onvermijdelijke geschuif met een geo (waar de passer verwacht werd) blijkbaar ook in, iets wat een aantal collega's niet erg apprecieert. Dat geschuif in plaats van een cirkelboogje maakt sommige tekeningen niet altijd duidelijker.

## Ten slotte

Er zijn nog twee jaren havo-examens en drie jaren vwo-examens te gaan voordat het nieuwe programma het examenjaar bereikt zal hebben. Er zal in de onderwerpen en stofomschrijving het nodige veranderen; de pilot-examens (te vinden op de website) geven daarvan al een voorafbeelding, de publicatie *Denken & Doen. Wiskunde op havo en vwo per 2015* geeft een nadere invulling. Er zijn meerdere collega's die daarbij ook uitkijken naar een nadere verduidelijking van wat op de examens precies van leerlingen wordt verwacht in de vorm van uitgewerkte opgaven, c.q. een CV dat duidelijker maakt wat wel en niet de bedoeling is. Met de lijst Examen(werk)woorden is daartoe een goede stap gezet; hopelijk volgen er meer.


### Over de auteur

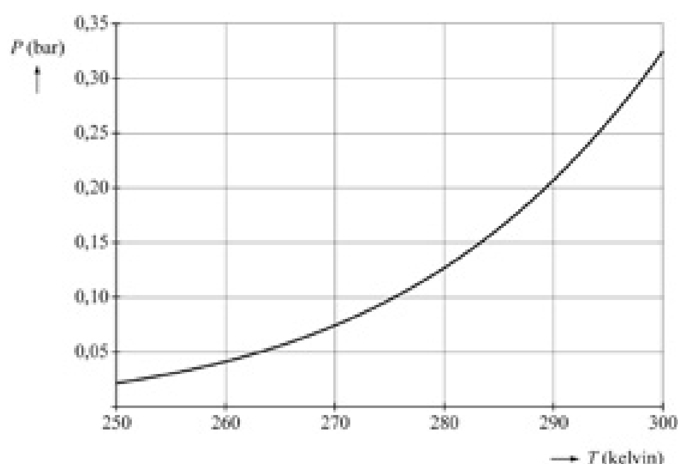
Erik Korthof is als webmaster verbonden aan de website van de NVvW en was vóór zijn pensionering docent wiskunde Tweede Fase aan het Bonhoeffer College te Enschede. E-mailadres: *eskorthof.1@kpnmail.nl*


Voor aceton, een zeer vluchtige vloeistof, geldt (bij benadering) $k = 4{,}146$, $m = 1144$ en $n = 53{,}15$, dus $\log P = 4{,}146 - \dfrac{1144}{T - 53{,}15}$ (met $T > 53{,}15$).

figuur 6 Uit: vwo B 2013 (De vergelijking van Antoine)

2 Beredeneer aan de hand van de formule zonder te differentiëren dat de functie inderdaad stijgend is.

figuur 7 Uit: vwo B 2013 (De vergelijking van Antoine)




figuur 8 Uit: vwo B 2013 (De vergelijking van Antoine)

# WEBSITE

## EXAMENARTIKEL CITO

Zoals elk jaar hebben de medewerkers van het Cito voor u een compleet en overzichtelijk examenartikel geschreven. Met daarin een analyse van alle papieren examens uit het eerste tijdvak 2013, aangevuld met illustraties, overzicht leerlingaantallen, verzamelde N-termen en de gebruikelijke p'- waarde-tabellen. Door omstandigheden is het helaas niet gelukt om deze bijdrage in de papieren Euclides te verwerken. We verwijzen u hiervoor dan ook graag naar onze digitale uitbreiding, te vinden op *www.nvvw.nl/euclides.*

# HET EXAMEN VWO WISKUNDE C (PILOT)

Floor van Lamoen

Voor het tweede jaar is dit jaar het pilotexamen vwo wiskunde C gehouden. Het gaat om het examenprogramma dat in het hele land vanaf 2015 in de vierde klassen zal gaan draaien. Dit programma wijkt tamelijk drastisch af van het huidige wiskunde C-programma en er is gezorgd voor een meer bij het profiel C&M passende inhoud. De verschillen komen tot uiting in het niet in het centraal examen toetsen van kansrekening en statistiek (maar wel combinatoriek!), en nieuwe onderdelen 'vorm en ruimte' en 'logica'.

Dat dit gevolgen heeft voor het examen, merk je meteen bij de eerste opgave, *Lichaamsoppervlak*, die gedeeltelijk overeenkomt met de gelijknamige opgave uit het reguliere wiskunde C-examen. Maar de onderdelen waarin kansrekening voorkomt, zijn in de pilot weggelaten. De tweede opgave, *Dialecten vergelijken*, komt wel geheel overeen met de tweede reguliere opgave.

De derde opgave is even wat anders. We komen in het domein Logica. Een domein dat door de leerlingen als relatief eenvoudig en leuk wordt gezien. De opgave *Wie is de dader?* (***zie figuur 1***) past geheel binnen de manier waarop deze stof aan de leerlingen is aangeboden. Een stukje tekst, dat logisch ontleed moet worden. De betekenis van de implicatie is een van de onderdelen die aan bod komt, dus leerlingen weten dat als er $A \Rightarrow \neg B$ staat, het alleen interessant is te kijken wat er over B gezegd kan worden als A waar is. Dit is kennelijk zo vanzelfsprekend dat deze stap niet expliciet in het correctievoorschrift is opgenomen. Het antwoord spitst zich nu toe op de aanwezigheid van Jones in de stad, iets waarover Jones en Visser niet verenigbare zaken zeggen. Een leuke en betrekkelijk eenvoudige opgave. Knap vind ik het van de examenmakers dat de tweede vraag een stuk lastiger bleek voor de leerlingen. De aanname dat maar een van de drie schuldig is en de twee onschuldigen de waarheid spreken moet door de kandidaten worden omgezet in 'schuldig=onwaarheid' en dat blijkt voor een aantal van hen te lastig.

De vierde opgave, *Gelijke volumes*, is een typische opgave voor het nieuwe domein Vorm en Ruimte. Als aanleiding wordt een foto van een kunstwerk met daarin drie balken – een plaat, een kubus en een zuil – van gelijk volume genomen (***zie figuur 2***). In de eerste vraag van deze opgave wordt een vrij eenvoudige berekening gevraagd van de breedte en hoogte van de zuil, gegeven de zijden van de kubus (1 meter) en de hoogte van de zuil (4 meter).

De tweede vraag van deze opgave is al aanzienlijk lastiger: 'Geef op de uitwerkbijlage op de zuil aan op welke hoogte de foto genomen werd en bereken deze hoogte.' De leerlingen moeten om dat te achterhalen op de horizon construeren en zich realiseren dat de hoogte van de horizon gelijk is aan de ooghoogte. Daarvoor zijn twee verdwijnpunten nodig. Eén verdwijnpunt is gauw gevonden, maar het tweede past niet op de bijlage. Wat nu? Zou de horizon echt horizontaal zijn? Daar mogen de leerlingen volgens het correctievoorschrift inderdaad van uit gaan. Maar toen ik op een groot vel de proef op de som nam, klopte het niet helemaal en bleek de camera toch een beetje scheef te zijn gehouden. Met de gevonden horizon kun je zien hoe hoog de zuil doorsneden wordt en vervolgens berekenen dat de foto op een hoogte van 1,80 meter genomen is.

Nog lastiger is de derde vraag. Een kwart van het ondervlak van de plaat staat op de bijlage in perspectief getekend en moet worden uitgebreid door eerst de dubbele breedte en lengte, en vervolgens de hele plaat, te construeren. Het betreft hier een eenpuntsperspectief, waardoor in rechtopstaande vlakken evenwijdig met de horizon de verhoudingen juist worden weergegeven. Daarvan, en van de *diagonaaltruc*, kun je in deze opgave gebruikmaken. In dit geval dus veel meten, en maar een keer een 'echte' constructie. Toch lastig voor de wat onzekere leerlingen.

Na de meetkundevragen komen er nog twee vragen die ingaan op het feit dat de kunstwerken gezien kunnen worden als deel van een hele reeks aan dergelijke kunstwerken. De vierde vraag komt neer op een zeer eenvoudige lineaire vergelijking, probleemloos. De vijfde vraag geeft aan dat er van wiskunde C-leerlingen toch ook nog wat algebraïsche vaardigheid wordt gevraagd. Met een combinatie van een substitutie, een deling en worteltrekken moet een formule worden omgebouwd.

De vijfde opgave, *DNA-bewijs*, is de tweede vraag met een forensische context en komt geheel overeen met dezelfde vraag in het reguliere wiskunde C-examen.

De zesde opgave, *Vierkanten*, is een opgave waarin combinatoriek en getallenrijen aan de orde komen. De opgave komt grotendeels overeen met de gelijknamige opgave in het pilotexamen voor wiskunde A. Wat een mooie context, een kunstwerk van 25 bij 25 vierkantjes, die door kleuring elk een getal coderen, tezamen van 0 tot 624 (***zie figuur 3***). De getallen vormen ook nog eens een magisch vierkant. Jammer dat er in deze opgave wat verwarring kan ontstaan: het kunstwerk is een vierkant en de elementen zijn ook vierkantjes – er wordt gerekend aan de som van een rij, maar we kijken ook naar de som van een rij vierkantjes in het kunstwerk. De eerste vraag van deze opgave vraagt naar het aantal mogelijke vierkantjes met verschillende kleurcoderingen, maar sommige leerlingen willen iets met het hele kunstwerk gaan doen. Jammer, want dit was een vrij eenvoudige combinatoriekvraag. Nadat in de tweede vraag de waarde bij een bepaalde codering moet worden bepaald, komt in de derde en vierde vraag de verwarring met de rijen. Uitgelegd wordt hoe de som van een rekenkundige rij kan worden bepaald en dat dit gebruikt kan worden om het *magisch getal* te bepalen van het magische vierkant van dit kunstwerk. De crux zit hem erin dat je het aantal termen in de rij, het aantal elementen in het kunstwerk, moet delen door het aantal rijen in het kunstwerk. In de vierde vraag moet dat worden geformaliseerd in een formule. Ik heb het gevoel dat veel leerlingen zich hier door het dubbele gebruik van het woord rij er te gemakkelijk af hebben gemaakt. Jammer. Misschien was dat te voorkomen geweest door voor het magisch getal naar de kolomsom te kijken. In de laatste vraag van dit examen, voor de meeste kandidaten de laatste wiskundevraag die ze zullen krijgen, moet met de bij de vorige vraag gevonden formule bepaald worden hoe groot een vierkant kan zijn opdat de magische som tussen de 500 en 1000 komt te liggen. Opletten, hier kunnen alleen gehele getallen als antwoord!

Het examen zit erop. Een redelijk lastig examen, getuige ook de N-term van 1,4. Maar wel een mooi examen, met een voor de C-leerlingen relevante invulling aan het vak. Wat enigszins verontrustend is, is dat we het hebben over zo'n enorm kleine groep leerlingen. Het is voor scholen niet eenvoudig daar op betaalbare wijze invulling aan te geven. Maar dat strekt verder dan deze examenbespreking.

## Over de auteur

Floor van Lamoen is docent wiskunde aan het Ostrea Lyceum te Goes, een van de scholen die deelnemen aan de pilotexamens wiskunde op het vwo.
*E-mailadres: lmo@ostrealyceum.nl*

**Wie is de dader?**

De politie heeft drie verdachten van de poging tot moord op buschauffeur Robert gearresteerd: Stolberg, Jones en Visser. Alle drie ontkennen ze de dader te zijn. Tijdens het verhoor beweert Stolberg dat Robert een vriend van Jones was en dat Visser Robert haatte. Jones beweert dat hij Robert helemaal niet kent, en dat hij bovendien helemaal niet in de stad was, toen Robert daar neergestoken werd. Visser beweert dat hij zowel Stolberg als Jones samen met Robert in de stad gezien heeft toen Robert neergestoken werd en dat één van beiden Robert neergestoken moet hebben.

We nemen aan dat slechts één van de drie schuldig is en dat de twee onschuldigen de waarheid spreken. Om uit te zoeken wie de dader is, bekijken we de volgende twee beweringen:

$A$: Jones spreekt de waarheid
$B$: Visser spreekt de waarheid

Uit bovenstaande gegevens volgt dat geldt: $A \Rightarrow \neg B$

3p 8 Toon aan dat geldt: $A \Rightarrow \neg B$

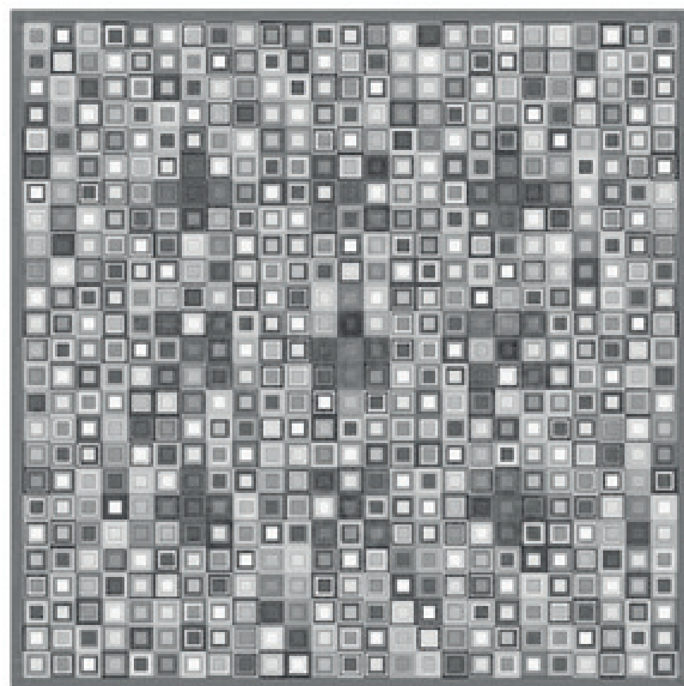
Uit $A \Rightarrow \neg B$ volgt dat óf Jones óf Visser de dader is.

3p 9 Leg uit wie de dader is.

figuur 1 Uit: vwo C 2013 pilot (Wie is de dader?)



figuur 2 Uit: vwo C 2013 pilot (Gelijke volumes)



figuur 3 Uit: vwo C 2013 pilot (Vierkanten)

# WISKUNDE D IN 6 VWO

Marian Nugteren

Sinds twee jaar geef ik alle lessen wiskunde D op het Stedelijk Dalton Lyceum te Dordrecht. De 6 vwo klas heb ik dus van mijn collega overgenomen. Er zitten maar vier leerlingen in die klas. Ik vind dat zo bijzonder dat ik een schilderij gemaakt heb van dit groepje. Mijn hobby is schilderen. Ik schilder al van jongs af aan, eigenlijk alles wat ik zie. Bij een bepaald landschap of tafereel krijg ik de behoefte om dat vast te leggen. Ze werken altijd zo fantastisch als op dit schilderij.

In 5 vwo heb ik zeven leerlingen. Maar sinds ik die lessen geef, ga ik in maart alle derde klassen rond om reclame te maken voor wiskunde D. Zodoende heb ik in 4 vwo nu 14 leerlingen en dat aantal hoop ik de komende jaren ongeveer te houden. Ik heb ontzettend veel plezier in het geven van wiskunde D en heb ook steeds wel vier leerlingen die doorgaan naar de tweede ronde van de Wiskunde Olympiade; we oefenen daar namelijk ook voor in de les.

## Over de schilderes

Marian Nugteren-Dorleijn is docent wiskunde (doctoraal gehaald aan de VU) aan het Stedelijk Dalton Lyceum te Dordrecht.
E-mailadres: *mariannugteren@gmail.com*
Website schilderijen: *www.mariannugteren.nl*



# FORMULES IN WISKUNDE-EXAMENS

Gerard Koolstra

Het is in Nederland gewoonte om bij de eindexamens wiskunde niet alleen allerlei contexten aan bod te laten komen maar ook aan te sluiten bij notaties die in andere vakgebieden gangbaar zijn. Zo komen formules met hoofdletters (en kleine letters) regelmatig voor evenals formules waarbij grootheden een rol spelen. Op zich misschien geen probleem, ware het niet dat er vaak onduidelijkheden zijn en misverstanden ontstaan, soms ook door slordigheden in de examens zelf.

## Grootheden, eenheden en (maat)getallen

Afstand, snelheid, kracht en temperatuur zijn voorbeelden van grootheden. Ze worden uitgedrukt met behulp van eenheden. Een afstand van 10 km, een kracht van 20 N(ewton) een temperatuur van 300 K. In de natuurwetenschappen is het weglaten van de eenheid een 'doodzonde'. In het dagelijks leven doen we dat wel vaak als er geen misverstand mogelijk is. Hoe oud ben je? Hoe lang ben je?

Sommige formules laten zich goed als een verband tussen grootheden weergeven. Een voorbeeld daarvan is de oppervlakteformule voor een bol:

(1)... $A = \pi \cdot R^2$

*R* is de straal, een lengtegrootheid, dus bijvoorbeeld 3,2 mm. 12 inch of 1,23 km; *A* is de oppervlakte in de bijbehorende oppervlakte eenheid, dus bijvoorbeeld mm², sqinch of km²; π is het getal 3,14159....
Deze formule is bestand tegen wisseling van eenheid. Invullen van 250 cm i.p.v. 2,5 meter geeft ook een juist antwoord (alleen in cm² in plaats van m²). Lengte is een *dimensie* (vaak weergegeven met *L*), of je die nu uitdrukt in inch, cm, mm of km. Het kwadraat $L^2$ wordt vermenigvuldigd met het (dimensieloze) **getal** π en levert inderdaad een oppervlakte op. Natuurkundigen zijn getraind om te kijken of een formule qua dimensie klopt.

Je hoeft niet ver te zoeken naar formules waarbij het werken met grootheden wat meer problemen geeft. Laten we een simpel model voor celdeling nemen. Op tijdstip 0 (dit is onafhankelijk van de eenheid) heeft de bacteriekweek een oppervlakte van $A_0$ en elke 20 minuten verdubbelt de oppervlakte. Een formule als $A = A_0 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$ (of $A = A_0 \cdot 8^t$ ), geeft problemen wanneer *t* de grootheid tijd aanduidt. Wat moet je je voorstellen bij twee tot de macht 2 uur? Welk dimensie hoort hierbij? In de natuurwetenschappen wordt dit probleem vaak opgelost door te werken met de verhouding tussen (het quotiënt van) de (variabele) tijd en een vaste tijdsperiode, vaak aangeduid met $t_0$. De formule wordt dan:

(2)... $A = A_0 \cdot 2^{\frac{t}{t_0}}$

Wanneer $t_0$ nu een tijd van 20 minuten voorstelt, kan de formule probleemloos gebruikt worden, en maakt het ook niet uit of er 3 uur, 180 minuten of 10800 seconden wordt genomen. In de wiskunde zijn we (althans dat dacht ik) gewend aan een iets andere aanpak, Er wordt gebruik gemaakt van *getalsvariabelen* die overeenkomen met de maatgetallen bij uitdrukkelijk afgesproken eenheden.
Voorbeeld:

(3)... $A = 72 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$

*A* is de oppervlakte in mm² en *t* de tijd in minuten.
In deze vorm betekent gebruik van andere eenheden een echte omrekening. Bij gebruik van cm² als oppervlakte-eenheid en uur als tijdseenheid wordt de formule:

(4)... $A = 0{,}72 \cdot 2^{3t}$

De vraag 'Bereken *A* na 15 minuten' is nu een andere dan 'Bereken de *oppervlakte* na 15 minuten'. Bij de eerste vraag kan ook desgewenst toegevoegd worden *in twee decimalen.* Wanneer echter de oppervlakte wordt gevraagd (inclusief eenheid) is het onzinnig om een nauwkeurigheid in decimalen te geven, maar is het aantal significante cijfers de enige juiste benadering. Maar juist het rekenen met significante cijfers wordt expliciet bij de examenprogramma's wiskunde niet bekend verondersteld. In formule (3) geeft invullen van $t = 15$ voor *A* de uitkomst van 121,089.... Afgerond op 1 decimaal is dit 121,1. De bijbehorende oppervlakte laat zich schrijven als 121,089 mm², als 1,21089 cm², maar ook als 0,0121089 dm². Afronden van het laatste op 1 decimaal zou het wat potsierlijk aandoende antwoord 0,0 dm² opleveren. Als je werkt met een vast aantal significante cijfers (bijvoorbeeld 2) zijn de antwoorden 1,2 cm² en 0,012 dm² echter gelijkwaardig evenals 12 × 10 (of 1,2 × 10²) mm². Je kunt dus niet ongestraft grootheden (en eenheden) binnensmokkelen zonder je begrippenapparaat van onnauwkeurigheid aan te passen. In en rond diverse examens van dit jaar werd er soms wat onnauwkeurig omgegaan met deze materie. Hieronder geven we een paar voorbeelden.

## Havo B Tornadoschalen

De formule $F = \left(\frac{v}{6,3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$ staat bij dit thema centraal.
Hierin is $v$ de maximale windsnelheid binnen de tornado in m/s en $F$ de intensiteit van de tornado op een bepaalde schaal, de Fujita-schaal. $F$ wordt afgerond op een geheel getal. De tweede vraag luidde: 'Een tornado met intensiteit 4 op de Fujita-schaal komt niet zo vaak voor. Bereken de minimale waarde van $v$ in zo'n tornado. Rond je antwoord af op één decimaal'. Het gaat inderdaad om een verband tussen getalsvariabelen, de dimensie links en rechts van het = teken zijn niet met elkaar in overeenstemming.
$V$ is een getalsvariabele, dus de vraagstelling is correct, evenals het antwoordmodel. Maar leerlingen en docenten met een natuurkundige achtergrond zijn geneigd om $v$ als grootheid op te vatten, en geven (of verlangen) niet $v = 81{,}3$ maar $v = 81{,}3$ **m/s** als antwoord, en vinden het antwoord 292,5 km/u ook goed.
De toelichting '$v$ de maximale windsnelheid in de tornado in m/s' is misschien ook niet duidelijk genoeg.

## Vwo A Lichaamsoppervlak

Bij vraag 2 (ook in het wiskunde C examen) stond de volgende informatie: 'Het gemiddelde lichaamsgewicht van kinderen van 12,5 jaar is 44,8 kg. De 25% lichtste kinderen van 12,5 jaar hebben een lichaamsgewicht van hoogstens 39,3 kg. In de rest van deze opgave nemen we aan dat voor iedere leeftijdsgroep het lichaamsgewicht normaal verdeeld is.' Met als opdracht: 'Bereken de standaardafwijking van het lichaamsgewicht op 12,5-jarige leeftijd in **één decimaal nauwkeurig**'. [nadruk in citaten is toegevoegd door mij. GK]
In het antwoordmodel stond het verwachte antwoord 8,2 kg. Zoals niet onopgemerkt is gebleven staat kg hier niet tussen haakjes, en hoort het er bij. Dat is in overeenstemming met de vraag: 'Bereken de standaardafwijking van het lichaams**gewicht**'. Wanneer 8,2 kg juist is, mag 8200 gram dan ook? Natuurlijk, maar. dat is niet in één decimaal nauwkeurig. Zoals al eerder betoogd, afronden op een bepaald aantal decimalen heeft alleen zin bij een getalsvariabele. In de vraagstelling zit een tegenstrijdigheid.

Verderop in het wiskunde A examen staat de formule van Dubois centraal: $S_{Dubois} = 0,007184 \cdot L^{0,725} \cdot M^{0,425}$.
De toelichting luidt: 'In deze formule, die ook wel de formule van Dubois wordt genoemd, is $S_{Dubois}$ de lichaamsoppervlakte in m$^2$, $L$ de lichaamslengte in cm en $M$ het lichaamsgewicht in kg. Bij een volwassen vrouw met een lengte van 1,75 m hoort dan de formule $S_{Dubois} = 0,303787 \cdot M^{0,425}$.' Het is heel duidelijk dat het gaat om een verband tussen getalsvariabelen (wat zou je trouwens moeten met cm$^{0,725}$ of kg$^{0,425}$?). Maar dan komt de vraag: 'Bereken door middel van differentiëren van deze laatste formule de waarde van de afgeleide voor $M = 66$ **kg** en leg uit wat de betekenis is van die **waarde.'** Deze vraag en het antwoordmodel roept bij mij heel wat vraag- en uitroeptekens op. Nu is $M$ ineens een grootheid (met eenheid). Hoe zit dat met $S$? De dimensie van $S$ opgevat als grootheid zou dan zijn $L$(engte)$^{0,425}$ terwijl het om een oppervlakte gaat met dimensie $L^2$. En wat is dan de dimensie van de afgeleide? Wanneer we de kg als 'slip of the pen' zien (1 punt bijtelling vanwege verschrijving in het examen?) gaat het om een verband tussen twee getalsvariabelen dat we kunnen zien als een differentieerbare functie. De afgeleide is te schrijven als $S'_{Dubois} = 0,129109 \cdot M^{-0,575}$ en invullen $M = 66$ [zonder kg] geeft $S' \approx 0{,}0116$. In het beoordelingsmodel staat tussen haakjes m$^2$/kg, maar dat moet ook echt tussen haakjes blijven staan want het gaat om een waarde, zoals in de vraag ook duidelijk staat. In de uitleg van de **betekenis** van die waarde mogen/moeten wat mij betreft de eenheden m$^2$ en kg een rol spelen. Maar niet eerder.

MAAK VRAGEN (EN ANTWOORD-MODELLEN) WAARBIJ LEERLINGEN KUNNEN LATEN ZIEN WAT ZE OP WISKUNDEGEBIED (NIET) KUNNEN, ZONDER DAT ZE WORDEN AFGEREKEND OP DISCUTABELE SUBTILITEITEN

## Vwo C Lichaamsoppervlak

Differentiëren komt niet voor in het wiskunde C programma. In het examen stond een andere opgave waar wat gerommeld werd met het onderscheid getal en grootheid. Er wordt een formule gepresenteerd die verwant is aan die van Dubois, de formule van Haycock: $S_{Haycock} = 0,024265 \cdot L^{0,3964} \cdot M^{0,5378}$. Deze wordt vergeleken met een andere variant de formule van Mosteller (als wortelfunctie gegeven). Duidelijk wordt gezegd dat $S$ het lichaamsoppervlak in m$^2$, $L$ de lengte in cm en $M$ het lichaamsgewicht in kg is. Ter verduidelijking wordt nog gezegd dat bij een lengte van 1 meter geldt: $L = 100$. Helemaal goed. Maar dan de vraag: 'Behalve bij $M = 0$ **kg** is er bij $L = 100$ nog een **lichaamsgewicht** waarbij de formule van Mosteller en Haycock precies dezelfde lichaamsoppervlakte geven. Bereken dat **lichaamsgewicht** in **één decimaal** nauwkeurig '. Het is me een raadsel waarom hier niet gewoon over (waarden) van $M$ wordt gesproken. In dit geval kan de slordigheid negatieve gevolgen hebben voor de kandidaten. In het

antwoordmodel staat namelijk als antwoord: 14,6 **kg.** Docenten die een punt afgetrokken hebben bij leerlingen die geen kg hebben opgeschreven valt niet zoveel te verwijten, maar de examenmakers (en controleurs) wel.

### Vwo B De vergelijking van Antoine

Het vwo wiskunde B-examen begon met het verband tussen temperatuur en dampdruk: $\log P = k - \frac{m}{T-n}$.

Hierin is $P$ de dampdruk in bar en $T$ de temperatuur in kelvin en zijn $k$, $m$ en $n$ constanten die afhangen van de soort vloeistof. Ook hier gaat het om een verband tussen getalsvariabelen. De logaritme van druk (dimensie $M\ L^{-1}\ T^{-2}$ ) is ook wat lastig als grootheid te definiëren. Meteen de eerste vraag geeft aanleiding tot een frons: 'Bereken op algebraïsche wijze het kookpunt van aceton. Rond je antwoord af op een geheel aantal kelvin.' Het kookpunt is een temperatuur waarbij een eenheid hoort (meestal k(elvin) of °C). Wordt de waarde van $T$ gevraagd, of de temperatuur? Het correctievoorschrift zet (gelukkig) kelvin tussen haakjes. Na invulling van waarden voor $k$, $m$ en $n$ ontstaat de volgende formule voor aceton: $\log P = 4{,}146 - \frac{1144}{T - 53{,}15}$

(met $T > 53{,}15$). $P$ kan daarna ook uitdrukkelijk als functie van $T$ worden geschreven en deze functie kan dan weer worden gedifferentieerd naar $T$. Wanneer je $P$ en $T$ als grootheden beschouwt, dus inclusief eenheden, kun je aan de afgeleide ook een eenheid toekennen, maar dit is (was?) erg ongebruikelijk binnen de wiskunde.

Terecht wordt er (vraag 3) gevraagd naar de **waarde** van het differentiaalquotiënt. De eenheid die in het beoordelingsmodel tussen haakjes staat ondermijnt dat weer enigszins.

Tien jaar geleden begon ik mijn bijdrage met de opmerking dat kritiek leveren op eindexamens gemakkelijk is vanwege de talrijke en niet zelden tegenstrijdige eisen en verlangens. Dit geldt nog steeds, maar dat neemt niet weg dat je mag verwachten dat de tekst, vragen en antwoordmodel duidelijk zijn, niet tegenstrijdig en correct. Op de achtergrond ligt de vraag wat de rol van contexten in de wiskunde-examens moet zijn. Sommigen willen die rol terugdringen, met name bij de B-examens. Ik heb – denkend aan A/C-examens – altijd gepleit om recht doen aan de context (en de inbreng van leerlingen). Omdat dit lastig is, lijkt het me verstandig om zeker bij de B-examens wat minder scheutig te zijn met (op zich aardige) contexten. Bij alle examens zou ik daarnaast opnieuw willen pleiten voor eerlijkheid en openheid. Geef duidelijk aan wat je verwacht, zowel voor als tijdens het examen. Maak vragen (en antwoordmodellen) waarbij leerlingen kunnen laten zien wat ze op wiskunde gebied (niet) kunnen, zonder dat ze worden afgerekend op discutabele subtiliteiten. Met de syllabi (inclusief voorbeeldopgaven) leek een stap gezet in die richting, maar naar mijn gevoel worden er nu stappen terug gezet.

### Over de auteur

Gerard Koolstra is docent wiskunde aan het St. Michaelcollege Zaandam.
E-mailadres: *gkoolstra@stmichaelcollege.nl*



# MEDEDELING




## FINALE VAN DE NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Op vrijdag 13 september vond op de Technische Universiteit Eindhoven de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Hiervoor waren 149 leerlingen uitgenodigd uit de categorieën zesde klas, vijfde klas en vierde klas of lager. Zij kregen in drie uur tijd vijf pittige opgaven voor hun kiezen. Zelf ook proberen? U vindt de opgaven (en uitwerkingen) op *www.wiskundeolympiade.nl*. De vijftien prijswinnaars (vijf uit elk van de drie categorieën) worden 8 november bekend gemaakt tijdens de prijsuitreiking.

# GETUIGEN

## OLIVER BYRNE

Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie 'Getuigen' behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



De boeken van *De Elementen* van Euclides zijn eeuwenlang van invloed geweest op het wiskundeonderwijs in West Europa. Sinds de late middeleeuwen zijn *De Elementen* het beeld geweest dat alle studenten gedurende hun studie als toonbeeld van exactheid kregen voorgehouden. In de loop van de zestiende en zeventiende eeuw werd het aan alle universiteiten gewoonte om studenten de eerste zes boeken te laten bestuderen als onderdeel van de propedeutische studie; soms werden daar de laatste boeken over de stereometrie nog aan toegevoegd.

Toen rond 1800 nieuwe ideeën ontstonden over hoe onderwijs het beste kon worden vormgegeven, werd er ook nagedacht hoe meetkunde het beste aan kinderen kon worden uitgelegd. In alle Europese landen werden meetkunde en algebra een verplicht onderdeel van het curriculum in het secundair onderwijs. Het aspect van de meetkunde dat gewaardeerd werd, was dat het een logisch consistente beschrijving bood van de fysieke realiteit. Aanschouwelijk onderwijs, waarin leerlingen direct te zien kregen waar het in de les over ging, was daarom ook populair. Veel onderwijzers schreven en publiceerden hun eigen methoden waarin die aanschouwelijkheid een plaats kreeg.

Voor de meetkunde betekende dat, dat lesboeken veelal werden uitgevoerd met duidelijke figuren op afzonderlijke platen, of dat leerlingen werden aangemoedigd om zelf mooie tekeningen te maken van de situaties die ze behandelden. Leerlingen maakten de constructies zelf stap voor stap en werden aangemoedigd zelf constructie- of bewijsstappen te bedenken. Soms werden leerlingen mee het veld ingenomen om landmeetoefeningen aan den lijve te ondervinden. Fraai gekleurde afbeeldingen waren niet per se het streven, maar werden door veel onderwijzers wel aangemoedigd, omdat het interesse in de meetkunde illustreerde én versterkte. Een aantal van deze meetkundeboeken voor het secundair onderwijs liet stukken wit op de bladzijden open, zodat de leerling zelf de figuren kon tekenen. De boekbezitter kon zijn editie altijd laten inbinden met extra witte pagina's om de figuren op uit te werken.

Een van de mooiste boeken die deze nieuwe ideeën hebben opgeleverd, is de Euclides-editie van Oliver Byrne. In dit boek uit 1847 had Byrne het idee van de aanschouwelijkheid verheven tot kern van zijn didactiek. In de inleiding legde hij uit dat in zijn visie kinderen moeite hadden met de wiskundig logische taal. Het zoeken naar de letters in de bijbehorende figuur belemmerde het zien van de logische stappen waar het om ging. Door de letters helemaal uit te bannen en te vervangen door gekleurde lijnstukken, hoeken en vlakken, poogde Byrne juist de essentie van de meetkunde – het leren logisch nadenken – te benadrukken door haar herkomst – de abstractie van de fysieke ruimte – in kleur en vorm te accentueren. Daarbij was een aantrekkelijk en toegankelijk boek volgens Byrne dé manier om de leerling te verleiden tot bestudering van een vakgebied dat aandacht verdiende.

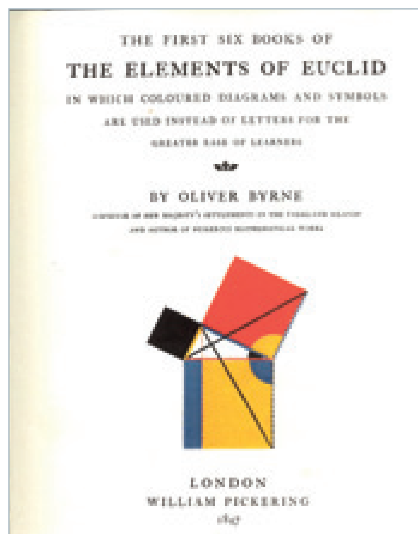
Byrne was een ingenieur, later ook opleider van ingenieurs, die zich in negentiende-eeuws Victoriaans Engeland ontpopte als auteur van wiskundeboeken. Naast een aantal technische patenten en zijn bijdragen aan een populaire ingenieurs-encyclopedie onderwees hij ingenieurs in opleiding en hield hij zich bezig met landmeetkunde – op het titelblad van zijn Euclides noemt hij zichzelf landmeter van de koninklijke bezittingen op de Falklands. In de late jaren dertig van de negentiende eeuw begon hij met publicaties ten behoeve van het meetkundeonderwijs. Tot in de jaren zeventig bleef hij actief. De Euclides-uitgave leek te passen in zijn ambitie om het ingenieursvak en de bijbehorende opleiding een wetenschappelijke status te bieden.

De Euclides-editie van Byrne is gedrukt in een periode dat gecompliceerd meerkleurendrukwerk technisch mogelijk werd. Tot de late jaren veertig van de negentiende eeuw werden gedrukte platen met de hand ingekleurd. Drukwerk met meer kleuren betekende immers dat hetzelfde papier met verschillende drukplaten moest worden bedrukt: één plaat voor elke kleur inkt. Letters in een accentkleur werden wel gedrukt, maar machinaal

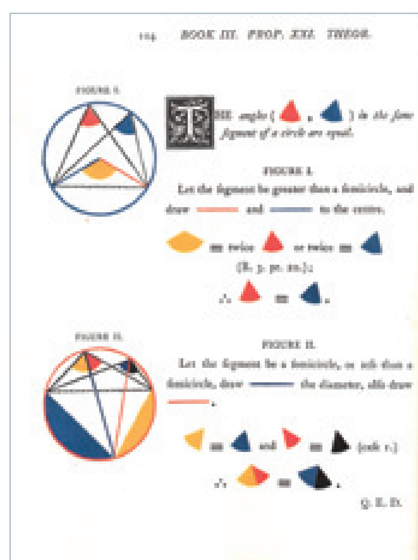
was het niet mogelijk om het papier zó nauwkeurig op de goede plek te brengen dat bij een drukgang met een andere kleur de vormen ook daadwerkelijk nauwkeurig op de gewenste plaats op het papier terecht kwamen, laat staan dat het met meerdere kleuren mogelijk was. Het met de hand inkleuren van drukwerk was voor lesboeken veel te kostbaar. In de jaren veertig raakte de idee dat kinderen mooie (gekleurde) afbeeldingen nodig hadden om hun wiskundige ideeën goed te vormen achterhaald. Enerzijds had de wiskunde haar rol van bewaakster van de toegangspoort tot technische studies prima weten op te eisen, en daarmee was haar rol in het secundair onderwijs verzekerd. Anderzijds was, mede hierdoor, het nut van de beoefening van meetkunde verschoven van een verzinnelijking en axiomatisering van de ruimte, naar de zuiver logische exercitie die in de wiskunde gewaardeerd werd. De logische samenhang van de stellingen werd om haar zelve gewaardeerd, en werd in de nieuwe opvattingen van het meetkundeonderwijs juist boven de aanschouwelijkheid gesteld. De meetkundeboeken begonnen daardoor juist bewust afstand te nemen van het Euclidische origineel en de nadruk in die nieuwe boeken lag juist op de interne logica, los van de verzinnebeelding daarvan in driehoeken en cirkels. Juist het appèl dat Byrne deed op de aanschouwelijkheid deed afbraak aan die logica, en werd daardoor minder gewaardeerd. De plaatjes verdwenen niet uit de meetkundeboeken, maar er werd door docenten benadrukt dat de waarheid van het gestelde onafhankelijk was van de afbeelding die je erbij kon voorstellen.

De Euclides-editie van Byrne verscheen dus in een tijd dat het technisch net mogelijk was om dit drukwerk te produceren, maar tegelijkertijd didactisch eigenlijk niet meer speciaal wenselijk werd geacht. Hoewel zonder meer een randverschijnsel, is het dus heel bijzonder dat het werk in deze vorm verscheen. Een enthousiaste wiskundedocent nam de moeite om een prachtig boek samen te stellen, dat omwille van de op dat moment gedateerde didactische visie (en vanwege de prijs, ongetwijfeld!) niet of nauwelijks in het onderwijs werd gebruikt. Een boek, daarentegen, dat vanwege het kleurgebruik en de gebruikte technieken, door boekhistorici nog steeds wordt gewaardeerd. Vandaar dat uitgeverij Taschen in 2010 nog een prachtige facsimile van het werk uitgaf. Een boek dat tevens illustreert hoe verrijkend het effect was van de vroegnegentiende-eeuwse ideeën over meetkundedidactiek.

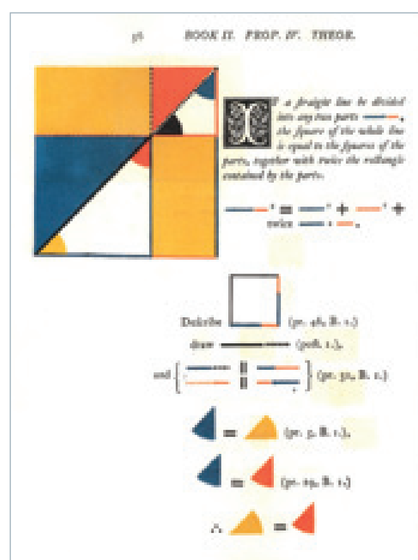
In het kader van de restyling van het tijdschrift *Euclides* heeft Christian Peperkamp een nieuw logo voor deze serie ontworpen, dat geïnspireerd is op het werk van Byrne. Dat in deze eerste *Euclides* in kleur aandacht is voor deze prachtige Euclides-editie in kleur is een passend eerbetoon, zowel aan de negentiende-eeuwse ingenieur en docent die indertijd een prachtig boek maakte, als aan ons vernieuwde verenigingstijdschrift.


THE FIRST SIX BOOKS OF
THE ELEMENTS OF EUCLID
IN WHICH COLOURED DIAGRAMS AND SYMBOLS
ARE USED INSTEAD OF LETTERS FOR THE
GREATER EASE OF LEARNERS
BY OLIVER BYRNE
LONDON
WILLIAM PICKERING
1847

figuur 1 Titelblad van *Euclids Elements*, met op het titelblad de figuur die de stelling van Pythagoras verbeeldt (Bron heruitgave Taschen (2010))


BOOK III. PROP. XXI. THEOR.

figuur 2 *Euclids Elements*, bewijs dat de hoeken op dezelfde boog gelijk zijn, gebruikmakend van het gegeven dat de middelpuntshoek tweemaal zo groot is als de omtrekshoek (Bron heruitgaven Taschen (2010))


BOOK II. PROP. IV. THEOR.

figuur 3 *Euclids Elements*, een oppervlaktestelling uit boek II (Bron heruitgave Taschen (2010))

## Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

# ANALYSE VWO WISKUNDE B

Mariken Barents

Voorgaande jaren heb ik u verteld over het Examentrainingsmateriaal dat ik zelf heb ontwikkeld, de training, 'TRUC' en Evaluatie SE-3 door leerlingen aan de hand van de vaardigheden. Dit jaar heb ik gebruikgemaakt van deze middelen. Ook heb ik weer accent gelegd op het onderdeel Bewijzen, naast natuurlijk de gebruikelijke aandacht voor de aanpak van opgaven.

## Bewijzen

Waar het bij het onderdeel Algebra en Analyse mogelijk is om de leerlingen een algemene aanpak te laten ervaren en onderwijzen, blijft het bewijzen voor mij als docente nog lastig om daar een concrete aanpak voor de leerling te laten zien. Dit geldt natuurlijk voor de groep leerlingen die elke keer een bewijsopgave ervaren als onmogelijk. De laatste jaren heb ik veel aandacht besteed aan een mogelijke aanpak. Dit jaar heb ik de didactiek verder ontwikkeld. Kort en krachtig, want het moet blijven hangen.

Leerlingen ervaren bewijzen vaak als een wereld van onbegrensde mogelijkheden en dat maakt onzeker. Dus dat brengen we terug naar het volgende:
Wat weten we zelf:
- Cirkel: welke stellingen komen het vaakst terug in bewijsopgaven? (maximaal vijf)
- Driehoekenvierhoeken: welke stellingen worden het vaakst gebruikt bij bewijzen? (ook zo'n vijf)

Hoe pakken we de bewijsopgave aan:
- Wat staat er in de stelling vóór het werkwoord? Dat is gegeven.
- Wat staat er in de stelling ná het werkwoord? Daar moet je naar toe.
- Kom je er niet uit? Dan heb je nog niet alle gegevens gebruikt.

Deze regels hebben we bij iedere bewijsopgave gebruikt. Op deze manier wordt het oplossingsgebied waarbinnen ze verkennen kleiner. Kan je niets met die vijf stellingen die we elke keer weer benoemen, dan is het verder kijken. Maak daarbij vooral gebruik van de verwijswoorden.

## Het examen

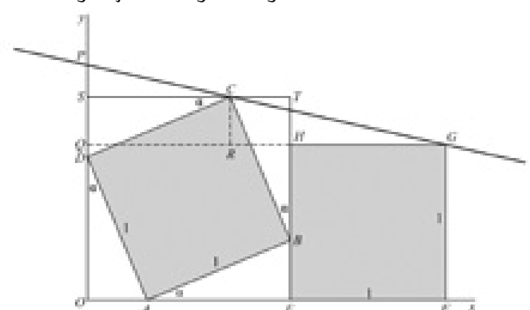
Bij het analyseren van het examen heb ik naast het examen zelf, gebruikgemaakt van de scores van Wolf die mij toegestuurd zijn. De scores van 14.935 leerlingen zijn hierbij betrokken. Hiervan zijn 25 leerlingen uit mijn groep.

Het landelijk gemiddelde van het totaal aantal punten is 52,9; mijn groep heeft 53,7 gescoord. Mijn doel elk jaar is om beter te scoren dan gemiddeld en het liefst met een aanzienlijke marge. De vraag is of dat reëel is.

***De vergelijking van Antoine*** – De eerste opgave is vaak bepalend voor de mentale gesteldheid van een leerling tijdens het examen. Op het eerste oog lijkt deze opgave af te schrikken: veel letters in een formule en een logaritme. Echter als je de gegevens gebruikt, zijn de eerste vier punten gemakkelijk te scoren. Vervolgens wordt gevraagd te beredeneren dat de functie stijgend is. Altijd een lastig onderdeel, maar als de stappen netjes gevolgd worden, prima te doen. De opgave erna biedt ruimte tot zowel een algebraïsche als een numerieke oplosmethode. De algebraïsche methode verdient meer punten; de afgeleide is geen standaardformule. De laatste opgave van dit onderdeel komt neer op invullen en de rekenregels volgen. Met herleiden worden $a$ en $b$ zichtbaar. Voor leerlingen echter niet zo triviaal.

In mijn groep hebben ze lager gescoord dan gemiddeld: 8,5 punten versus 8,7 landelijk gemiddeld van de 14 punten. Hierbij zijn er vooral punten verloren gegaan bij de tweede helft van de opgave.

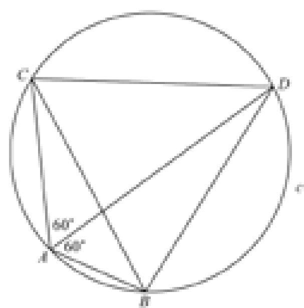
***Vierkanten*** – Leuke plaatjes, maar wel goniometrie. Wordt door leerlingen als lastig ervaren. Gelukkig zijn de coördinaten van $C$ al gegeven. Dit gecombineerd met het feit dat het om een vierkant gaat, zorgt dat de goede lezer deze opgave prima kan maken. De punten die daarop volgen zijn gemakkelijk te scoren. In de tekst is aangegeven dat gelijkvormigheid gebruikt moet worden.



figuur 1

Voor het gemak zijn de twee driehoeken benoemd. Het scoremodel zorgt ervoor dat je de verschillende onderdelen in de breuk even bij de juiste lijnstukken moet zetten, en klaar. Teleurstellende opgave vind ik dit. Net als de 'Toon aan'-opgave die erop volgt. Er is niet meer nodig dan haakjes wegwerken en de simpele herleidformules gebruiken. In mijn ogen zijn hier gratis 9 punten te verdienen. De opgave wordt afgesloten met een maximaliseeropdracht. Quotiëntregel toepassen met goniometrische formules levert vaak problemen op: kettingregel, minnetjes, goed uitschrijven. Als dat gelukt is, volgt het oplossen van een vergelijking. Hierbij is het aan de kandidaat te kiezen welke methode: algebraïsch of numeriek.
Mijn groep heeft gelijk gescoord met het landelijke gemiddelde, namelijk 14,4 punten van de 19 punten. Veel punten in dit examen aan goniometrie, maar niet op het niveau waar we onze leerlingen op voorbereiden.

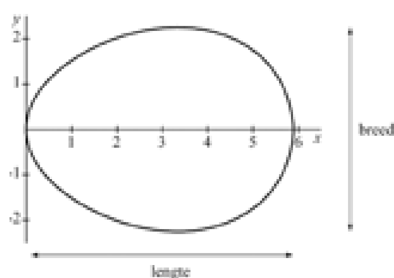
***Vanuit een stomphoekige driehoek*** – Ook dit jaar keek ik uit naar de bewijsopgaven. De eerste was direct een inkopper. Dit hebben we vaker gezien: constante hoek en 4 punten binnen!



figuur 2

De tweede helft van de punten zouden lastiger moeten zijn. Maar de makers van de opgave hebben precies aangegeven hoe je het bewijs aan moet pakken. Teleurstelling nummer twee. Doe je als docent zo je best de leerlingen naar een hoog niveau te brengen waarop zij zelf stappen kunnen maken, hoeven ze op het CSE slechts te doen wat er voorgeschreven wordt.
Des te verrassender is dat dan nog te weinig van de leerlingen (60%) naar mijn zin er dan 4 of 5 punten voor scoren. Desalniettemin scoorde mijn groep wel iets beter dan het landelijk gemiddelde: 6,8 punten gemiddeld tegenover 6,5 punten van de 9 die er te behalen zijn

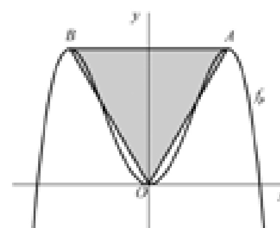
***Een eivorm*** – Deze opgave ziet er leuk uit! En het doet direct denken aan het proefglas van vorig jaar. Toen ging het nog om een samengestelde formule, deze keer is het iets simpeler: gewoon één wortelformule.



figuur 3

De eerste vraag is een lekkere binnenkomer. Het antwoord staat er, de opdracht voor de kandidaat is om het af te leiden. De meesten lukt dat wel. De inhoud van het ei bepalen is een leuke opgave. Omwentelingslichaam, dus $\pi$ niet vergeten en de formule in het kwadraat. Dat laatste is alleen maar prettig gezien de wortel. Dan blijft er een simpele formule over om te primitiveren. Weer een opgave waarbij niet veel inzicht of onderzoeksvaardigheden worden gevraagd. De afsluitende opgave vond ik ook leuk, maar weer niet moeilijk. Bijna al mijn leerlingen hadden deze opgave goed. Misschien was het goed geweest om het examen met deze opgave te beginnen.
Mijn groep scoort weer hoger dan landelijk gemiddeld: 9,4 versus 9,1 punten gemiddeld van de 12 punten.

***Driehoek bij een vierdegraadsfunctie*** – Dit soort opgaven is mijn favoriet. Smullen! Op zich kan deze opgave ervaren worden als een standaardopgave.



figuur 4

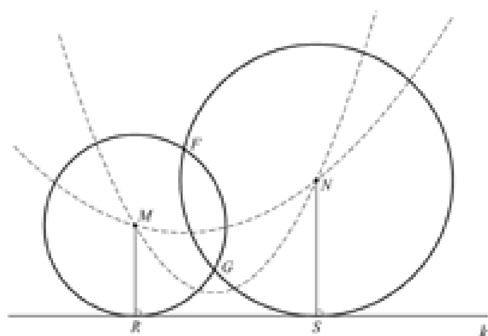
Praktisch ieder CSE heeft zo'n soort opgave. De uitvoering ervan levert nogal wat potentiële foutmomentjes op. Het is de kunst het overzicht te houden van hoever je in de berekening bent en wat er nog moet gebeuren. Wortels, kwadraten, breuken, $x$, $y$, en $p$, dat alles maakt de opgave gecompliceerd. Prima opgave naar mijn mening.

Waarom de driehoek is gearceerd, begrijp ik niet goed. In de vraagstelling lijkt hier geen reden voor, dus het benoemen dat OAB een driehoek vormen lijkt overbodig. Als de vraag gesteld zou zijn met 'voor welke $p$ is de driehoek gelijkzijdig?', dan zou ik het wel begrijpen. Had ik persoonlijk mooier gevonden. Er is zelfs een leerling de oppervlakte gaan berekenen van de driehoek, vermoedelijk door het gearceerde.
Op deze opgave scoort mijn groep ongeveer gelijk aan het landelijke gemiddelde: 4,1 punten versus de 4,0 voor de grote groep van de 8 punten in totaal. Van mijn groep had ik wel meer verwacht bij deze opgave.

***Nulpunten, extremen en buigpunten*** – Een recht-toe-recht-aan-opgave bestaande uit twee 'Toon aan'-opgaven. De eerste mag geen probleem zijn, hooguit het laatste stapje (helaas). De helft van de punten is relatief gemakkelijk te scoren. Alleen dan echt laten zien dat er geen extremen zijn, is toch lastiger dan gedacht. Het leuke van de laatste opgave is dat er staat dat $f$ twee buigpunten heeft. Dit geeft informatie over het antwoord. Dus vraag ik me weer af wat we denken van de kandidaten die door foutjes in de uitwerking op slechts

één buigpunt uitkomen en dit ook als eindantwoord geven. Mijn groep scoort hierop weer net iets meer dan gemiddeld, namelijk 7,4 punten versus 7,3 landelijk gemiddeld van de 11 punten.

***Brandpunt gezocht*** – Parabolen, brandpunten en richtlijnen. Het is het onderdeel van de meetkunde die wat minder aandacht krijgt op het CSE. Deze keer wel, en het was goed te doen. Vooral doordat er weer in de inleidende tekst beschreven staat hoe het aangepakt dient te worden. Voor de eerste opgave moet de kandidaat weten wat de definitie is van een brandpunt en de meetkundige plaats parabool. Dat betreft basiskennis.



figuur 5

De laatste opgave van het CSE zou lastiger kunnen zijn, zij het niet dat ook hier weer (te) veel informatie gegeven wordt. Door één van de eigenschappen te gebruiken, is één punt al binnen. De gedachte dat het om rakende cirkels van 2 en 4 cm zou gaan, is dan niet voor de hand liggend. Ook hier scoort mijn groep net iets hoger (3,4) dan het landelijke gemiddelde, 3,3 punten van de 6 punten in totaal.

## Relatief objectieve analyse

Er wordt vanuit drie invalshoeken naar de puntenverdeling gekeken. De globale onderdelen en onderdelen binnen functies en meetkunde. Onderstaande tabel is ontstaan door de punten te verdelen over de onderwerpen Meetkunde, Machtsfuncties, Exponentiële (en logaritmische) functies en Goniometrie.

| Onderdelen | punten |
|---|---|
| Meetkunde | 15 |
| Machtsfuncties | 31 |
| Exponentiële functies | 14 |
| Goniometrische functies | 19 |

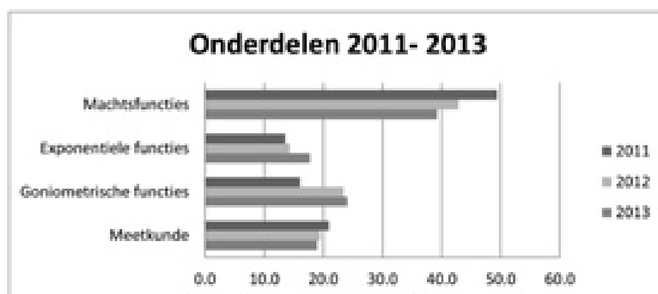
Een andere interessante kijk op de verdeling van de punten is naar vaardigheid op het gebied van functies en formules.

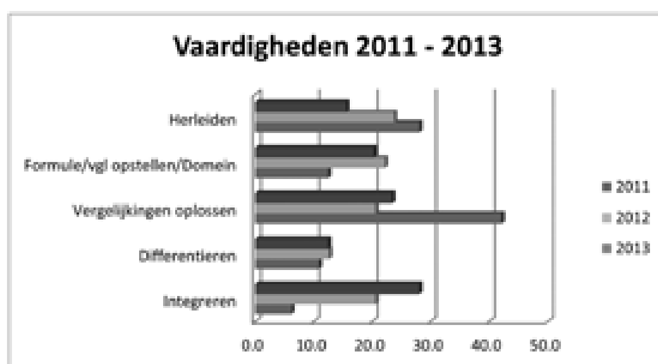
| Vaardigheden | punten |
|---|---|
| Herleiden | 18 |
| Formule/vgl opstellen/Domein | 8 |
| Vergelijkingen oplossen | 27 |
| Differentiëren | 7 |
| Integreren | 4 |

Ook dit jaar is het de moeite om de meetkunde onder te verdelen:

| Bewijzen | punten |
|---|---|
| Driehoeken | 7 |
| Cirkels | 6 |
| Overig | 2 |

Aangezien ik voor u de laatste drie jaar de analyse heb mogen verzorgen, is het interessant om de verzamelde gegevens over de jaren te vergelijken. Dit kan nuttig zijn voor de aandacht in de laatste lesweken voor het CSE komend schooljaar. Opvallend blijft de hoeveelheid opgaven over machtsfuncties. De goniometrische functies komen wel wat op, maar dit jaar waren ze helaas niet van een hoog niveau.




tabel 1 en tabel 2

Het aandeel vergelijkingen was groot dit jaar. Ook opvallend is dat er slechts in één opgave wat met integreren werd gedaan.

## Persoonlijk analyse

Opvallend aan het examen van dit jaar was de hoeveelheid opgaven waarbij in de inleidende tekst al werd weggegeven wat de te gebruiken oplosmethode is. Er was nauwelijks vrijheid voor de kandidaat om zelf het onderzoekspad te kiezen. Dit vind ik erg jammer en storend, juist aangezien er zo'n aandacht is voor denkactiviteiten en onderzoeksvaardigheden. De opgaven betreffende goniometrie waren te basaal. Erg jammer, creativiteit was niet nodig om alle punten te verdienen. Net als de bewijsopgaven. Voor integreren is er slechts een opgave. Na mijn eigen poging van uitwerken van het examen, traditiegetrouw vóór ik aan het corrigeren ga, was ik zwaar teleurgesteld over het niveau. En bij het corrigeren werd het ook bevestigd. Alleen de leerlingen die echt moeite hebben met wiskunde B en misschien beter wiskunde A hadden kunnen kiezen, kwamen niet tot een voldoende. Niet dat ik mijn leerlingen een onvoldoende gun, integendeel, maar ik verwacht dat we de leerlingen op een niveau brengen zodat ze op het eindexamen kunnen laten zien wat ze daarvan geleerd hebben.

De norm had ik tussen de 0 en 0,5 verwacht. Ik was zeer verbaasd dat de norm op 0,8 uitkwam. Mijn gedachte direct was: dan zal de herkansing wel een stuk pittiger zijn. Mijn groep is uitgekomen op een gemiddelde van 7,1. Het SE-gemiddelde was een 6,4. Normaal is het verschil tussen SE en CSE in mijn groepen nooit meer dan 0,5. Gezien de samenstelling van de groep had ik geen uitschieters verwacht. Maar zoals de collegae op mijn school me corrigeren: wat fijn voor onze leerlingen!
Het feit dat mijn groep net iets beter heeft gescoord dan gemiddeld, geeft aan dat het landelijke gemiddelde op een cijfer tussen de 6,8 en 7,0 uitkomt.
Dit jaar was het minder lastig om het correctiemodel goed toe te passen. Op slechts een enkel punt twijfelde ik.

## Conclusies

- Het examen bevat weer veel machtsfuncties.
- Bij bewijzen zijn de stellingen nodig die we in de lessen benoemden als 'standaardstellingen.'
- Dit examen is (hopelijk) niet representatief voor de voorbereiding van de leerlingen die volgend jaar examen gaan doen.
- De voorbereiding is, op de Meetkunde na, niet veel anders geweest dan het jaar ervoor. Aandacht voor de TRUC (zie analyse vorig jaar) wil ik graag nadrukkelijker in de les naar voren laten komen.
- De tip (maak de opgaven die je 'gemakkelijk' vindt, beperk je niet tot de volgorde van de opgaven in het examen) blijft een nuttige.
- Meer differentiëren in de les (op kleine schaal) door een ruime opdracht te geven zoals 'maximaliseer de oppervlakte', in plaats van één of twee aantoonopgaven. Die aantoonopgaven worden verwerkt in de tips. De leerlingen bepalen zelf of ze een tip nodig hebben. Op deze manier worden de leerlingen meer uitgedaagd de onderzoeksvaardigheden zelf aan te boren.


### Over de auteur

Mariken Barents is docente wiskunde aan het Goois Lyceum te Bussum.
E-mailadres: *mbarents@gl.gsf.nl*




# MEDEDELING

## VELDRAADPLEGING SYLLABI WISKUNDE A EN C (H/V)

Van dinsdag **29 oktober** tot en met vrijdag **20 december 2013** organiseert het College voor Examens (CvE) een veldraadpleging rondom de syllabi bij de nieuwe examenprogramma's wiskunde A en C voor havo en vwo. Docenten VO, vakdidactici en andere vakdeskundigen kunnen hun mening geven over deze syllabi.
U kunt zich vanaf dinsdag 29 oktober aanmelden via *www.cve.nl.* Na aanmelding ontvangt u een mail met een link naar die enquêtes waarvoor u zich heeft aangemeld. U hebt dan tot en met 20 december de tijd om de enquêtes in te vullen.

# VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw tot in de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt.
Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Mogelijk geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!




Deze keer eerst de opgave die verscheen in de puzzelrubriek van mei 2013. Daarna een relatief eenvoudige opgave uit 1930, waaraan we achteraf gaan sleutelen. De derde opgave, uit 1931, is een mooi dwarsverband tussen klassiek meetkunde en goniometrie. Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgaven wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

## Opgave 1

**(Zie ook Euclides 88-6, mei 2013, puzzelrubriek)**
Gegeven een driehoek $ABC$ met de bissectrices $AD$, $BE$ en $CF$ die elkaar snijden in $S$ (***zie figuur 1***). De driehoek heeft zijden $a = BC = 7$, $b = AC = 5$ en $c = AB = 8$.
Bewijs dat $|ES| = |FS|$.

## Opgave 2 (1930)

In driehoek $ABC$ trekt men de hoogtelijnen $AD$, $BE$ en $CF$. Het hoogtepunt is $H$.
Indien $\angle B = 60°$ en opp. $\square HDBF = \frac{1}{3}$ opp. $\Delta ABC$ vraagt men de hoeken $A$ en $C$ te berekenen.

## Opgave 3 (1931)

De afstanden van het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een driehoek tot de middelpunten van de aangeschreven cirkels verhouden zich als 2 : 3 : 2.
Bereken de hoeken van de driehoek.

## Uitwerking opgave 1

Toepassen van de cosinusregel in driehoek $ABC$ geeft $\angle A = 60°$. De hoekensom in deze driehoek geeft: $60° + 2o + 2x = 180°$, waaruit volgt $o + x = 60°$. In driehoek $BCS$ is dus $\angle BSC = 120°$, dus is ook $\angle ESF = 120°$. Dus is vierhoek $AFSE$ een koordenvierhoek. Teken hiervan de omgeschreven cirkel (***zie figuur 2***).

Omdat $AS$ bissectrice is, zijn de hoeken $FAS$ en $EAS$ gelijk (#), dus ook de bogen $FS$ en $ES$, dus ook de koorden $FS$ en $ES$. Klaar. Mooie opgave voor in de les, waarbij eventueel de hint voor de cosinusregel kan worden gegeven (of de lengtes van de zijden niet geven, maar vervangen door $\angle A = 60°$).

In het algemeen geldt: $\angle A + 2o + 2x = 180°$, dus $o + x = 90° - ½\angle A$. Dus $\angle FSE = \angle BSC = 180° - o - x = 180° - (90° - ½\angle A) = 90° + ½\angle A$.

## Uitwerking opgave 2

Enkele mogelijke handvatten bij de werkschets (***zie figuur 3***):
- Zonder de algemeenheid te schaden kan $BF = 1$ worden gesteld.
- Er zijn (30-60-90)°-driehoeken aanwezig.

Wilt u het zelf eerst eens proberen?

**Een mogelijke aanpak** – Stel $AF = x$. Dan kunnen relevante lijnstukken worden uitgedrukt in $x$:

$$AB = 1 + x \ ; \ BD = \frac{1+x}{2} \ ; \ HF = \frac{x}{\sqrt{3}} \ ; \ AH = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$AD = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot(1+x) \ ; \ BC = 2 \ ; \ CF = \sqrt{3}$$

Dan geldt:

$$opp(ABC) = \tfrac{1}{2}\cdot AB\cdot CF = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot(1+x)$$

$$\begin{aligned} opp(HDBF) &= opp(ABD) - opp(AFH) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot BD\cdot AD - \tfrac{1}{2}\cdot AF\cdot FH \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot(1+x) - \tfrac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{x}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Invullen in de gegeven relatie – $opp(HDBF) = \frac{1}{3}opp(ABC)$ – levert dan een kwadratische vergelijking, die kan worden vereenvoudigd tot:
$x^2 - 2x + 1 = 0$
Dus $x = 1$.

Omdat hierdoor de driehoeken $AFC$ en $BFC$ congruent zijn ($ZHZ$), is driehoek $ABC$ gelijkzijdig; dus $\angle A = \angle C = 60°$.
Dit is enigszins teleurstellend. De opgavenmaker had vermoedelijk even snel een opgave nodig, en bepaalde in de gelijkzijdige driehoek de verhouding tussen $opp(HDBF)$ en $opp(ABC)$. Door verwisseling van het gegeven en het te bepalen verkreeg hij deze opgave.

Het is interessant de opgave een boeiender antwoord te geven. We laten $\angle B = 60°$ in tact en proberen te sleutelen aan de verhouding tussen $opp(HDBF)$ en $opp(ABC)$. Dan blijft de opgave niet alleen haalbaar in de klas, maar ook spannend.

We stellen:
$opp(HDBF) = \frac{a}{b}\cdot opp(ABC)$, met $0 < a < b$ en ggd($a$, $b$) = 1. Probeert u nu zelf eens de vergelijking in $x$ (met parameters $a$ en $b$) op te stellen.

**Mijn uitwerking hiervan** – Er geldt nu:
$\frac{a}{b} \cdot opp(ABC) = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{2} \cdot CF \cdot AB = \frac{a\sqrt{3}}{2b}(1+x)$

en:
$opp(HDBF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+x}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (1+x) - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)^2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2$

Gelijk stellen geeft, na enige algebra, de kwadratische vergelijking:
$bx^2 + (12a - 6b)x + (12a - 3b) = 0$

We willen deze mooi uit laten komen; dus zou het fijn zijn als de discriminant $D$ ervan een kwadraat (eventueel = 0) is.

$$D = (12a - 6b)^2 - 4b(12a - 3b) = 48(3a^2 - 3ab - ab + b^2)$$
$$= 16 \cdot 3 \cdot (a - b)(3a - b)$$

Het is niet aantrekkelijk (maar zeker wel te doen!) om zelf voor $a$ en $b$ waarden te gaan zoeken. Ik heb even een computerprogrammaatje geschreven dat alle combinaties van $a/b$ zoekt waarbij $a$ en $b$ kleiner zijn dan 100. De output ervan staat in ***figuur 4***.

Mijn eerste keuze zou zijn $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$, maar dan blijkt $\angle A$ gelijk aan 30° te zijn; eigenlijk nog te fraai.
Dan toch maar $\frac{a}{b} = \frac{11}{36}$, omdat dan de discriminant voor leerlingen een herkenbaar kwadraat is. Er zijn twee mooie uitkomsten voor $x$ en $\angle A$:

- $x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan\angle A = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \angle A \approx 79{,}1°$
- $x = 2 \Rightarrow \tan\angle A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle A \approx 40{,}9°$

## Uitwerking opgave 3

Eerst maar eens een werkschets gemaakt, waarin ervoor is gezorgd dat $EI : FI : DI = 2 : 3 : 2$ (**zie *figuur 5***). Uit deze verhouding volgt dat $EI = DI$. De lijn $CF$ is dan symmetrie-as van de figuur. (Gaat u dit even na?)
Hoe nu verder? Beschrijf uw aanpak!

**Mijn uitwerking** – Het is weer heerlijk 'angle chasing':
$\angle AIF = 90° - \frac{1}{2}\alpha = \angle BIF$. Dus $\angle AIE = \alpha$. En dan is $\angle AEI = 90° - \alpha$.
We kunnen de gegeven verhouding $IE : IF = 2 : 3$ nu inzetten door in driehoek $EIF$ de sinusregel toe te passen.

$$(1)\ldots \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{2} = \frac{\sin(90° - \alpha)}{3}$$

Gebruik nu:
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$

Daarmee gaat (1) over in de vergelijking:

$$(2)\ldots 4\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + 3\sin\tfrac{1}{2}\alpha - 2 = 0$$

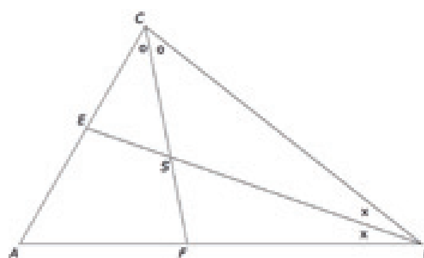
De wortels van (2) zijn $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$, waarvan een van de waarden buiten het bereik van de sinusfunctie valt. Zodat:

$\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{-3 + \sqrt{41}}{8}$, waaruit volgt:

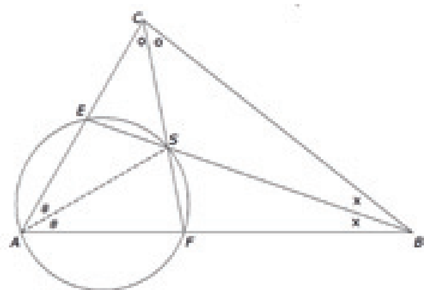
$\alpha \approx 50{,}35077034° \approx 50°21'3''$

Hiermee zijn de hoeken van driehoek $ABC$ bekend.

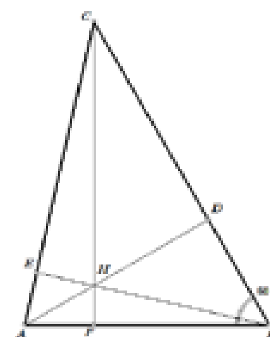
De opgave is te gebruiken in 6 vwo, omdat alle gebruikte stappen binnen de huidige eindtermen vallen. De sinusregel kan vermeden worden. In driehoek $EAI$ geldt dat $AI = EI \cdot \cos\alpha$, waarna in driehoek $AIF$ geldt dat $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{AI}{FI}$, waaruit dezelfde relatie rolt.



figuur 1

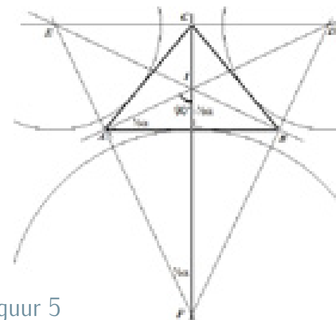


figuur 2



figuur 3

```
1/3     D=0        x = 1
1/4     D=144      x = 3
1/9     D=2304     x = 5
1/28    D=32400    x = 6
11/35   D=2304     x = 3/7   of   x = 9/5
11/36   D=3600     x = 1/3   of   x = 2
11/40   D=1296     x = 3/5   of   x = 3/2
11/45   D=9216     x = 1/5   of   x = 7/3
11/60   D=63504    x = 4
11/63   D=57600    x = 11/3
11/65   D=82944    x = 21/5
23/72   D=7056     x = 1/2   of   x = 5/3
23/77   D=20736    x = 3/11  of   x = 15/7
13/88   D=176400   x = 9/2
1/99    D=451584   x = 19/3
```
figuur 4



figuur 5


### Bron
Stoelinga, Th.G.D., & Tol, M.G. van (1958). *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958.* Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

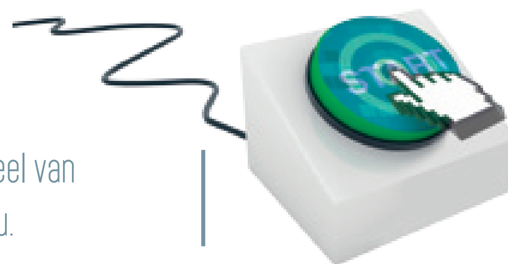

### Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

# EEN GOED BEGIN. . .

## EEN ECHTE BAAN

Erika Bakker



Bakker heeft vorig schooljaar de LIO-stage Wiskunde gedaan, als onderdeel van haar Educatieve Master. In deze rubriek deelt zij haar belevenissen met u.

Nadat mijn coach, de roostermaker en de rector mij hadden verteld dat er het nieuwe schooljaar waarschijnlijk geen uren meer voor mij zouden zijn, drong het tot mij door dat ik toch echt eens moest beginnen met solliciteren. Ik besloot om me in te schrijven bij verschillende websites om op de hoogte te blijven van de vacatures. Ook plande ik een dag in de meivakantie in om mijn CV bij te werken en sollicitatiebrieven te schrijven. De eerste brief was het meeste werk, maar daarna ging het steeds wat gemakkelijker en aan het eind van de dag kon ik vier brieven opsturen. Netjes als pdf-je bij een kort mailtje. Toen ik na de vakantie door de verschillende sites over een aantal andere vacatures werd gemaild, heb ik maar weer een paar brieven opgestuurd.

Ongeveer een week na de meivakantie had ik mijn eerste kennismakingsgesprek op een nevenvestiging van de school waar ik mijn LIO-stage deed. Na het gesprek was het voor mij duidelijk dat dit in ieder geval niet mijn droombaan was. Na een middag aarzelen heb ik toch maar gemaild dat ik verder ging zoeken. Dit was een lastige beslissing, want kun je als docent met weinig ervaring wel zo kritisch zijn? Het tweede gesprek dat ik voerde was een oriëntatiegesprek. Het was een heel leuk bezoek en ik zag mezelf al op die school rondlopen. Het was alleen nog helemaal niet duidelijk hoe mijn baan er tot oktober en na de kerst uit zou gaan zien. Dat zou in een eventueel vervolggesprek met de rector en iemand van P&O wel duidelijk worden. Ongeveer een week later werd ik uitgenodigd om de woensdag daarop langs te komen. Tussendoor kwam er nog een ander gesprek op een school. Tijdens dat gesprek was het mij al wel duidelijk dat ook dit niet mijn baan zou zijn. Zo dacht de school er ook over toen ze mij de dag daarna afbelden.

De woensdag waar ik net al over schreef werd een heel bijzondere dag. Een van de ergste dingen van een sollicitatiegesprek vind ik dat je op een vastgesteld tijdstip langs moet komen. Daardoor kun je soms je gewone lessen niet geven. Uitvallende lessen probeer ik zo veel mogelijk te voorkomen en mijn dag zag er hierdoor als volgt uit: uurtje les, 30 kilometer naar het westen rijden, gesprek op een nieuwe school, terug naar school, uurtje les, 50 kilometer naar het oosten rijden, het geplande vervolggesprek voeren. Ik had de auto van mijn ouders geleend, zodat ik overal op tijd kon komen.

Het gesprek op woensdagochtend vond ik heel spannend. Daar zat ik aan het hoofd van de tafel met vier mannelijke tafelgenoten. Ik heb alle vragen zo goed mogelijk beantwoord en ben daarna weer naar school gegaan voor mijn tweede les. Het vervolggesprek op de andere school viel helaas tegen. De rector kon mij nog steeds niet vertellen hoe mijn baan er uit zou gaan zien. Met een lang niet zo positief gevoel als na het eerste gesprek op deze school, ging ik weer weg.

Na het vervolggesprek bracht ik de auto naar het werk van mijn vader zodat hij hem na mij kon gebruiken. Voordat ik in de bus naar huis stapte, kwam ik mijn vakdidacticus tegen. Ik had hem als één van mijn twee referenties opgegeven. Hij vertelde mij dat hij aan het eind van de ochtend door de school was gebeld waar ik die ochtend op gesprek was geweest. Hij vroeg zich af wat hij eigenlijk allemaal over mij mocht vertellen. Het beeld dat de school na het sollicitatiegesprek van mij had, klopte volgens mijn vakdidacticus wel. Tegen de school had hij gezegd dat hij mij zou kiezen als hij het voor het zeggen had. Hij vertelde me wel dat ik wat zelfverzekerder moest proberen over te komen. Dat is makkelijker gezegd dan gedaan, maar in de bus naar huis heb ik er wel even goed over nagedacht.

Ik stapte net de bus uit, toen ik werd gebeld. De school waar ik 's morgens een gesprek had gevoerd, bood mij een baan aan. Dat had ik helemaal niet verwacht. Ik had er eigenlijk ook nog helemaal niet over nagedacht of ik de baan wel wilde. Zelfverzekerd heb ik gevraagd of ik even mocht terugbellen als ik thuis was, want ik stond op dat moment naast de snelweg.
Een uur later werd ik teruggebeld. Ik had er inmiddels even over kunnen nadenken. Eigenlijk was dit de baan die ik zo graag wilde hebben. Toen ik dit vertelde, zei de man aan de andere kant dat er in de komende jaren zeker ruimte voor uitbreiding was. Ik dacht 'dat is prima, maar zover wil ik nu nog niet vooruit kijken', maar dat zeg je natuurlijk niet.

Komend schooljaar ga ik dus beginnen op een nieuwe school. In mijn sollicitatiegesprek heb ik me niet anders voorgedaan dan ik ben en dat ik hiermee de baan heb gekregen die ik zo graag wilde hebben, is zeker een nieuw goed begin.

### Over de auteur

Erika Bakker rondde in de zomer van 2013 haar Educatieve Master Wiskunde af. Na haar LIO-jaar, het laatste jaar van de Master, begint ze dit jaar op een nieuwe school.
E-mailadres: *erikabakker66@gmail.com*

---

# 30 JAAR ARS ET MATHESIS PRIJSVRAAG



## REVERSPECTIEF

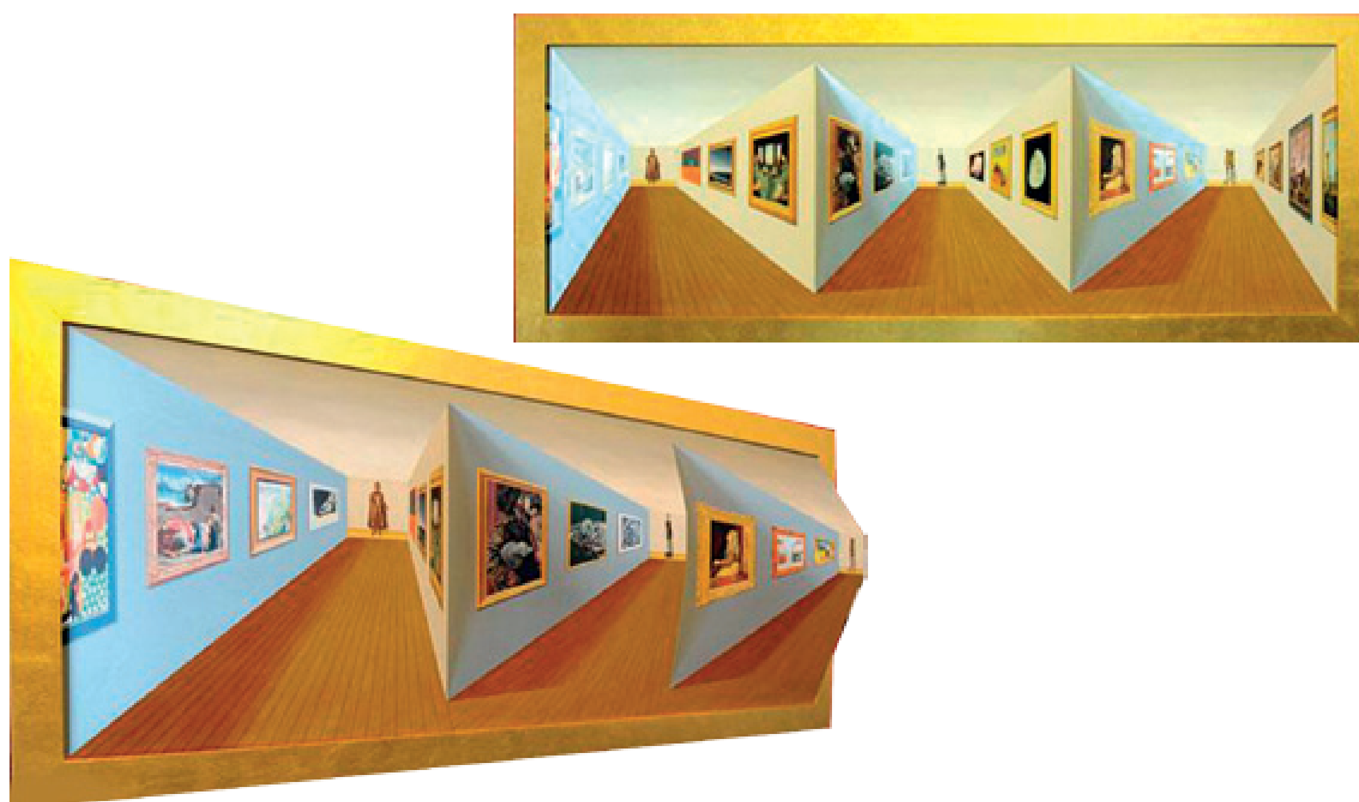
**Ars et Mathesis bestaat 30 jaar** – Een reden om een lustrumprijsvraag te organiseren. Deze heeft als opdracht: maak een Optische Illusie geïnspireerd door Patrick Hughes. Patrick Hughes (1939) is een Britse kunstenaar die in Londen werkt. Hij is de bedenker van het reverspectief, een optische illusie aangebracht op een driedimensionaal oppervlak, waarbij de delen die het meest veraf zijn dichtbij worden afgebeeld en omgekeerd. Het driedimensionale oppervlak kan een zigzag gevouwen stuk papier zijn of de (afgeknotte) piramide zoals ***in figuur 1***. Maar misschien is er nog wel wat anders te verzinnen...

**Hoe doe je mee?** – De deelnemers maken, zelf of samen als een groep, een reverspectief. Stuur je kunstwerk, of als dat om bijzondere redenen niet kan een aantal foto's met een filmpje waaruit de Optisch Illusie blijkt, op naar het secretariaat van Ars et Mathesis.

**Deelname** – Deelname staat open voor zowel groepen bijvoorbeeld schoolklassen als voor individuen. Bestuursleden van Ars et Mathesis zijn uitgesloten.

**De inzendtermijn** – Je bijdrage kun je tot uiterlijk **zaterdag 2 november 2013** insturen.
Per e-mail: *info@arsetmathesis.nl* of per post: Ars et Mathesis, Rietdekkershoek 21, 3981 TN Bunnik.

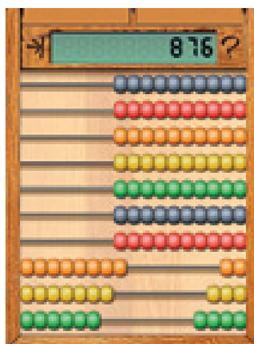
Zie voor uitgebreide informatie en randvoorwaarden de website van Ars et Mathesis: *www.arsetmathesis.nl*



figuur 1

# WISKUNDE DIGITAAL

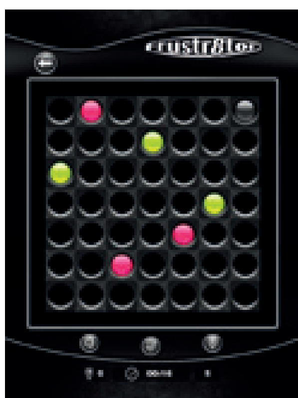
## FRUSTR8TOR




Lonneke Boels

### Geschikt voor: iPhone, iPad

Eindelijk een echte game die ook nog eens over wiskunde gaat. In frustr8tor moet je zorgen dat geen enkele gele bol op één lijn staat met andere bollen. Een lijn is horizontaal, verticaal en diagonaal. Het is afgeleid van het 8 koninginnenprobleem.




Het spel start op beginnersniveau en dan zijn de problemen zeer eenvoudig. Wie verder komt, kan meer levels vrijspelen. In totaal zijn er 75 problemen. Eventueel kun je tips of hints bij het probleem vragen.

Hoewel de problemen uit het spel ogenschijnlijk niet in het huidige wiskundeprogramma voorkomen, zijn er wel degelijk links met het huidige en nieuwe wiskundeprogramma. In het huidige programma is systematisch werken en noteren een belangrijke voorwaarde voor handig tellen. Ook in de nieuwe examenprogramma's wiskunde A, C en D komt handig tellen voor.

Daarnaast is logisch redeneren een nieuw examenonderdeel bij bijvoorbeeld wiskunde C. Dit spel oefent het logisch redeneren. Voor de liefhebbers van programmeren: bij het vinden van oplossingen gebruik ik vaak de techniek van backtracking. In wikipedia staat uitgelegd wat dit is. Het komt er op neer dat je niet alle mogelijkheden bekijkt, maar alleen die mogelijkheden die zinvol zijn.




### Pluspunten

- je kunt pauzeren (als je de app verlaat, ga je bij terugkomst verder waar je gebleven was).
- je kunt een oplossing opnieuw zoeken (als je de oplossing bij toeval gevonden hebt).
- hints zijn mogelijk maar leveren qua tijd veel straftijd op.
- het is een echt spel.
- het is ook echte wiskunde.
- er zijn verschillende niveaus.
- niveaus worden ontsloten als je een vorig niveau hebt opgelost.
- de taal is Nederlands.
- geliefd onder schaakliefhebbers maar je hoeft geen schaakliefhebber te zijn om dit spel leuk te vinden.

### Minpunt

- de aansluiting met de huidige stof voor wiskunde is niet direct duidelijk.

### Eindoordeel: aanschaffen

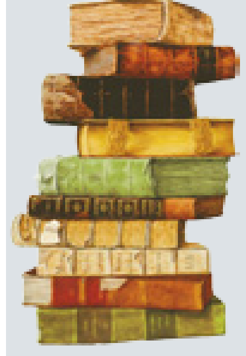
Kosten € 0,89
Geschikt voor: vmbo, havo, vwo, vermoedelijk alle niveaus.
Meer informatie over het spel: *http://www.frustr8tor.com/index.html*

### Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo's.
E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

# BOEKBESPREKING

## HOE WISKUNDE DE WERELD VERANDERDE



Bert Zwaneveld




Titel: Van de eerste getallen tot de chaostheorie en verder
Oorspronkelijke titel: Taming the infinite. The story of mathematics from the first numbers to chaos theory
Auteur: Ian Stewart
Uitgever: Lias, Hilversum (2012)
ISBN: 978-90-8803-022-2
Prijs: € 19,95 (paperback; 360 pagina's)

### Vooraf

In deze boekbespreking geef ik eerst de opzet van het boek en een overzicht van de inhoud, daarna volgt mijn oordeel.

### Opzet

Stewart geeft een historisch overzicht van hoe de wiskunde zich ontwikkeld heeft. Hij doet dat in twintig hoofdstukken. Door een hoofdstuk heen geeft hij in kaders interessante details over mensen en hun wiskundig werk passend bij dat hoofdstuk. Aan het eind van elk hoofdstuk zijn er steeds twee kaders: 'Wat X voor hen betekende' en 'Wat X voor ons betekent' met X het onderwerp van dat hoofdstuk. Naast de beschrijving van de ontwikkeling van het betreffende wiskundige onderwerp maakt de auteur dus het belang ervan niet alleen voor de wiskunde destijds duidelijk, maar ook voor ons, heden ten dage. Een mooi voorbeeld van deze twee kaders staat in het hoofdstuk over de moderne algebra, 'Algebra wordt volwassen' met als ondertitel 'Getallen maken plaats voor structuren'. In het kader 'Wat abstracte algebra voor hen betekende' wordt 'een vleugje' van het werk van Boole rond het midden van de negentiende eeuw uit de doeken gedaan: isomorfie tussen propositielogica en een algebra die werkt met de getallen 0 en 1 en de bewerkingen optellen en vermenigvuldigen modulo 2. In de propositielogica worden uit uitspraken door middel van de operatoren 'niet', 'of' en 'en' nieuwe uitspraken gemaakt. Een ware uitspraak en het getal 1 worden gekoppeld, een onware en het getal 0. Verder zijn optellen en het 'exclusieve of' gekoppeld, en net zo vermenigvuldigen en 'en'. Het 'gewone' 'of' gaat ietsje ingewikkelder. Het al dan niet waar zijn van de uitspraak (S of T) wordt bepaald door de waarde $S + T - ST$. Tegenwoordig is dit bekend onder de naam *waarheidstafels*, een term die Stewart overigens niet gebruikt. Dit kader over de ontwikkeling van de moderne algebra destijds eindigt met de zin: 'Dit was een van de eerste stappen naar een formele theorie van wiskundige logica.' Het kader over wat de ontwikkeling van de abstracte algebra voor ons betekent, gaat over coderingssystemen zoals die bij cd's en dvd's worden gebruikt om fouten hierop te detecteren en vervolgens te corrigeren. In het kort wordt uitgelegd hoe dat werkt volgens de code die Reed en Solomon in 1960 hebben ontwikkeld en waarbij abstracte algebra een cruciale rol speelt.

Didactisch zijn de eerste twee zinnen van dit hoofdstuk zeer relevant: 'Er kwam een nieuw soort algebra op, waarin de objecten van onderzoek geen onbekende getallen waren [zoals bijvoorbeeld de complexe getallen; noot BZ], maar ingewikkelder concepten: permutaties, transformaties, matrices. Wat net nog processen waren, zijn nu dingen.' Leerlingen moeten deze proces-object-dualiteit leren: waar $7 + 5$ eerst een proces is dat leidt tot een uitkomst, namelijk 12, is later een uitdrukking als $2a + 5$, een object waarmee op zich niets meer gedaan hoeft te worden. Deze ambiguïteit is een sterk punt van de wiskunde, maar lastig voor het wiskundeonderwijs.

Dit (veertiende) hoofdstuk van het boek, over de abstracte algebra, bestrijkt ongeveer de tweede helft van de negentiende eeuw met Lie, Klein, Killing en Emmy Noether aan wie kaders worden gewijd. Wiskundige theorieën die aan de orde komen, zijn: de (enkelvoudige) Lie-groepen en Lie-algebra's, de getaltheorie en de ringen, lichamen en algebra's. Dit leidt weer naar de eindige enkelvoudige groepen. Een beetje in het voorbijgaan wordt de grootste enkelvoudige groep genoemd: het monster met ongeveer $8{\cdot}10^{53}$ elementen, een aantal dat vele malen groter is dan het getal van Avogadro. Met het bewijs van de laatste stelling van Fermat door Andrew Wiles uit 1995 en een kader over Wiles sluit dit hoofdstuk af.

### Inhoud

Alle hoofdstukken zijn ongeveer opgebouwd op de manier zoals hiervoor beschreven: een thema of wiskundig onderwerp, de mensen die bijdragen aan de ontwikkeling ervan in een bepaalde periode hebben geleverd, meestal geïllustreerd met kaders over hen en de twee kaders over de betekenis van het betreffende thema destijds en voor ons.
In de twintig hoofdstukken van het boek met een gemiddelde lengte van ongeveer zeventien bladzijden

komen achtereenvolgens de volgende onderwerpen aan de orde:

- het begin van het tellen (turven);
- de eerste stappen in de meetkunde met vormen en de bijbehorende bewijzen, onder andere de stelling van Pythagoras;
- de schrijfwijze van de getallen, ook de negatieve getallen;
- het begin van de algebra met de 'onbekende *x*', ook de rij van Fibonacci en de derdegraads vergelijkingen;
- driehoeksmeting en logaritmen; onder andere driehoeksmeting op een bol naar aanleiding van de navigatie op zee, en daarna in het platte vlak, alsmede het getal e;
- krommen en coördinaten met de aansprekende ondertitel 'meetkunde is algebra is meetkunde', met onder andere Descartes, functies en grafieken;
- het begin van de getaltheorie, dus ook de priemgetallen, dus ook Euclides met diens stelling met bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn, evenals het modulo-rekenen;
- de differentiaal- en integraalrekening, alsmede (het verschil tussen) calculus en analyse met, naast aandacht voor Leibniz en Newton, ook aandacht voor Kepler en dus voor de astronomie;
- de toepassing van de differentiaal- en integraalrekening in de natuurkunde, met nogal wat onderwerpen, zoals de slingerbeweging en differentiaalvergelijkingen bij muziek, licht, geluid, elektromagnetisme, warmte en temperatuur – daarbij is de titel van de laatste paragraaf veelzeggend: Natuurkunde wordt wiskunde;
- complexe getallen, inclusief het begin van de complexe functietheorie;
- het funderen van de analyse, onder andere de Fourier-transformatie, limieten, machtreeksen, de Riemann-hypothese en de logistische groei;
- de uitbreiding van de euclidische meetkunde met de projectieve, de elliptische en de hyperbolische;
- symmetrie en groepentheorie, onder andere over de (on)oplosbaarheid van een vijfdegraads vergelijking;
- topologie met onderwerpen als het Koningsberger bruggenprobleem, de Möbius-band en de Riemann-bol;
- meetkunde in een willekeurig aantal dimensies, onder andere de quaternionen, matrixvermenigvuldiging en de differentiaalmeetkunde;
- de logica en de fundamenten van de wiskunde met onder andere de kardinaliteit van verzamelingen en Gödels onvolledigheidsstellingen;
- kansrekening en statistiek, onder andere combinatoriek en de normale verdeling;
- rekenmachines en computerwiskunde met onderwerpen als het numeriek oplossen van vergelijkingen;
- chaos en complexiteit, waarin natuurlijk fractals.

Hopelijk geeft dit een indruk van de rijkdom aan inhoud van het boek: een mooi overzicht over de historische ontwikkeling van de wiskunde in een goed geschreven boek met goed gekozen voorbeelden en goed gedoseerde aandacht voor de hoofdrolspelers.
Maar 'dit voordeel (van de grote rijkdom) heeft wel een paar nadelen'.

## Oordeel

De diepgang waarmee de wiskundige onderwerpen worden besproken, is zeer wisselend: soms oppervlakkig zoals bij de statistiek, soms wel heel diepgaand zoals bij de algebraïsche structuren.

Laat ik dit wat verder illustreren. Het hoofdstuk over differentiaalvergelijkingen gaat heel ver, met name waar het om partiële differentiaalvergelijkingen gaat. Daar wordt als voorbeeld de potentiaaltheorie genoemd, inclusief de bijbehorende formule, maar met uiterst summiere uitleg. Voor de niet in dit deel van de natuurkunde geschoolde lezer gaat dit veel te ver.

'DIT WAS EEN VAN DE EERSTE STAPPEN NAAR EEN FORMELE THEORIE VAN WISKUNDIGE LOGICA.'

Een ander voorbeeld. In het hoofdstuk over symmetrie komt bij het zoeken naar het al dan niet oplosbaar zijn van vijfdegraads vergelijkingen het volgende voor. 'Hij [te weten Lagrange; BZ] wist dat elke volledig symmetrische expressie – een die exact hetzelfde bleef, hoe er ook met de oplossingen werd geschoven – uitgedrukt kon worden in termen van de coëfficiënten van de vergelijking, waardoor het een bekende grootheid werd. Interessanter waren uitdrukkingen die enkele verschillende waarden konden aannemen als de oplossingen gepermuteerd werden. [...] ontdekte hij dat deels symmetrische functies van de oplossingen hem in staat stelden om een derdegraads vergelijking te reduceren tot een tweedegraads.' Het zou aan overtuigingskracht hebben gewonnen als Stewart dit met wat algebra geïllustreerd had; zeker, waar hij eerder tamelijk uitvoerig op de geschiedenis van het oplossen van derdegraads vergelijkingen is ingegaan (inclusief de bijbehorende formules), en waar hij een paar regels later opmerkt dat 'het werk van Lagrange niet alleen tot de zelfde oplossingen voor de derdegraads vergelijkingen leidde als die in de renaissance, maar ook *waarom* dat de juiste antwoorden waren.'

Nog een voorbeeld van iets waar de auteur wel erg ver gaat. In het hoofdstuk over algebra komen – zoals gezegd – Lie-groepen en Lie-algebra's voor. Met name de Lie-groepen worden helder geïntroduceerd aan de hand van de groep van draaiingen van een cirkel die continu zijn in de zin dat kleine draaihoeken kleine veranderingen op de cirkel betekenen. Maar wat dan volgt is voor iemand

die niet thuis is in deze theorie, niet te volgen. Er staat: '[...] hij [te weten Lie; BZ] keerde terug naar de transformatiegroepen en begon onderzoek naar de eigenschappen van infinitesimaaltransformaties [dat niet wordt toegelicht; BZ]. Hij liet zien dat infinitesimaaltransformaties die van een continue groep zijn afgeleid, *niet* gesloten zijn na samenvoeging [bedoeld zal zijn: via de bijbehorende groepsoperatie; BZ], maar wel na een nieuwe operatie die bekend staat als de *Lie-haak* of commutatorhaak en geschreven wordt als $[x, y]$. In matrixnotatie is de commutator $xy - yx$ of (bedoeld is: van; BZ) $x$ en $y$. De resulterende structuur heet nu *Lie-algebra*.'
Het is, om het nog anders te formuleren, zeer wisselend in wiskundige diepgang. Hiervoor gaf ik een aantal voorbeelden waar die diepgang naar mijn mening veel te ver gaat. Het hoofdstuk over kansrekening en statistiek blijft, weer naar mijn mening, te oppervlakkig. Wat over kansrekening wordt gezegd, is goed te volgen, maar de statistiek komt er met de constatering dat veel verschijnselen met de normale verdeling te beschrijven zijn, veel te bekaaid vanaf, terwijl de statistiek de wereld toch behoorlijk veranderd heeft.

HET IS, OM HET NOG ANDERS TE FORMULEREN, ZEER WISSELEND IN WISKUNDIGE DIEPGANG.

Dit doet de vraag rijzen voor wie dit boek geschreven is. Wiskundigen, zo mag je aannemen, weten dit allemaal. Is het dan bedoeld voor wiskundedocenten? Veel zullen ze ongetwijfeld weten, maar her en daar gaat het, zoals aangegeven, zeker te ver. Voor belangstellende niet-wiskundigen? Ik denk dat veel hun boven de pet zal gaan. Als het dan voor wiskundedocenten bedoeld is, komt de vraag of ze er voor hun onderwijs wat aan hebben, of er wellicht stukken zijn die ze aan hun leerlingen kunnen geven, bij wijze van achtergrondinformatie of als bron voor een opdracht. Dat is zeker het geval. Maar dat lang niet alles daarvoor geschikt is, moge duidelijk zijn. In bijna elk hoofdstuk komen wel een of meer geschikte stukken voor. Dat geldt zeker voor het begin van het tellen (turven), het begin van de meetkunde en de rol van de logica in de Griekse meetkunde, de notaties van de getallen door de eeuwen heen en bij verschillende culturen, het verhaal over de overgang van de concrete getallen naar de onbekenden (het begin van de algebra), stukken uit het hoofdstuk over topologie – zoals de formule die voor een convex veelvlak het verband tussen het aantal hoekpunten, ribben en zijvlakken vastlegt, de computerwiskunde en het stuk over fractals. Afgezien van het feit dat sommige stukken voor leerlingen zeker veel te moeilijk zijn, moet er met nog iets anders rekening worden gehouden: het grote aantal type- en vertaalfouten. Ik heb er zeker vijftig geteld. Ik beperk me hier tot *anti-afgeleide* in plaats van *primitieve*, *machtenreeks* in plaats van *machtreeks*, *kruisen* waar *snijden* bedoeld is, *veld* waar in Nederland toch meestal *lichaam* wordt gebruikt, terwijl het woord lichaam ook gebruikt wordt, *projectievlak* in plaats van *projectief vlak*. Soms leiden die foutjes tot iets onbegrijpelijks, zoals de verzameling van de *viervouden*, waar *viertallen* gelezen moet worden of een stukje over *vierkantsvergelijkingen* waar *vierdegraads vergelijkingen* boven staat. Heel storend vond ik dat de drietjes in de worteltekens bij de algemene oplossing van de derdegraads vergelijking [$x^3 + ax = b$; red.] verplaatst zijn naar de eerste $b$ onder dat wortelteken en daar als exponent staan. In het origineel staat dit gewoon goed. Ook in veel andere formules staan fouten. Het ergst is dat er ook gewoon fouten in staan die te wijten zijn – voor zover ik heb nagegaan met het origineel – aan slecht vertalen of slecht redigeren. Bij de bespreking van het bewijs van de stelling van Euclides staat de constructie die Euclides gebruikte, namelijk, dat, onder de aanname dat er eindig veel priemgetallen zijn, het product daarvan vermeerderd met 1, altijd een groter priemgetal is dat niet onder dat eindige aantal priemgetallen voorkomt. Echter, het product van de eerste zes priemgetallen plus 1, te weten $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1$, levert 30031 op en dat is gelijk aan $59 \times 509$, dus *geen* priemgetal. De getallen 59 en 509 zijn beide priemgetallen die niet in het rijtje van de eerste zes priemgetallen voorkomen.
In het origineel staat: (...) $abc + 1$. *This number must be divisible by some prime, but that prime cannot be any of the original three, since these divide abc exactly, so they cannot also divide* $abc + 1$, *since they would then divide the difference, which is 1. We have therefore found a new prime, contradicting the assumption that a, b, c are all the primes there are.* Voor de (enigszins) wiskundig geschoolde lezer zijn die fouten misschien nog wel te overkomen, maar als je als docent stukken als leerlingenmateriaal zou willen gebruiken, moet je dat allemaal wel 'even' corrigeren.

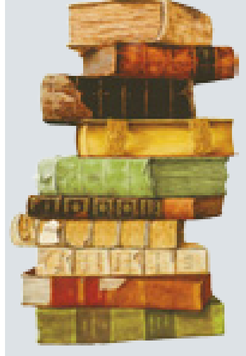
**Eindoordeel**: gemengd, want een bewonderenswaardige rijke inhoud, goed geschreven, goede voorbeelden, maar te wisselend in diepgang, met af en toe een veel te grote diepgang en tenslotte te veel fouten.

## Over de recensent

Bert Zwaneveld is emeritus-hoogleraar professionalisering van de leraar, in het bijzonder in het wiskundeonderwijs en het informaticaonderwijs.
E-mailadres: *g.zwaneveld@uu.nl*

# BOEKBESPREKING

## PROFESSOR STEWART'S SCHATKAMER VOL WISKUNDIGE UITDAGINGEN



Chris van der Heijden




Oorspronkelijke titel: Professor Stewart's Hoard of Mathematical Treasures
Auteur: Ian Stewart
Uitgever: Lias, Hilversum (2012)
ISBN 978-90-8803-006-2
Prijs € 16,95 (334 pagina's; paperback)

Het hier te bespreken in het Nederlands vertaalde boek met de titel *Professor Stewart's Schatkamer vol Wiskundige Uitdagingen* is het tweede deel van een trilogie die momenteel in de boekhandel aangeboden wordt. Het eerst verschenen deel, *Professor Stewart's Verzameling van Wiskundige Raadsels*, is besproken in *Euclides* nr. 4, februari 2012. Het derde deel, *Hoe Wiskunde de Wereld veranderde*, behandelt de geschiedenis van de wiskunde [1].

### De inhoud

Waarom worden kort na elkaar drie van dergelijke boeken van dezelfde auteur uitgegeven en is dit kennelijk een commercieel succes? Verrassend, want wiskunde ligt niet zo best in de markt.
Het is erg moeilijk om enige systematiek in dit boek te ontdekken. De auteur heeft hiervoor zelf een verklaring. In zijn voorwoord zegt hij dat je de twee eerst uitgegeven boeken door elkaar kunt roeren. 'Een mengsel, ..., moet een rommeltje zijn. Het hoeft niet aan een of andere vastgestelde logische volgorde te voldoen.'
Even verderop zegt hij: 'We leven in een wereld waarin tijd vrijmaken om systematisch een lang en gecompliceerd argument of een discussie te volgen, steeds moeilijker wordt.' Hij ontkent niet het belang van een systematische benadering, 'maar als de wetenschappelijke methode niet werkt, dan is er een alternatieve, een die slechts af en toe een paar minuutjes vergt. Blijkbaar houden nogal wat lezers van die tweede methode.'
Deze laatste methode is in dit boek gevolgd. Om de lezer die dit boek wil aanschaffen, inzicht te verschaffen, is geprobeerd enige orde te scheppen.
Maar liefst 168 onderwerpen worden aangesneden. Iets meer dan de helft bestaat uit problemen die de lezer uitdagen om ze op te lossen. Achter in het boek is een nadere uitwerking of de oplossing gegeven. Vaak wordt verwezen naar een website op internet. Getalproblemen nemen een prominente plaats in, gevolgd door problemen uit de combinatoriek, de meetkunde, de logica, de kansrekening, maar ook spelletjes met lucifers en kaarten en papiervouwen. De rest van het boek bestaat uit een bonte schakering van allerlei wetenswaardigheden. Om een idee te geven: telramen, historische getallenstelsels, wiskundige vermoedens, wetenschapsgeschiedenis, het cryptosysteem RSA, anekdotes over wiskundigen, antimaterie, aforismen, baanresonanties van planeten, interpretatie van de meetgegevens bij de opwarming van de aarde, de hitlijst van Hilbert, de snaartheorie, Flatland en nog veel meer. Er komen nauwelijks formules in het boek voor. De uitleg blijft vaak aan de oppervlakte, maar dat kan ook niet anders. Wie van de lezers is een specialist in de snaartheorie of wie kan het $(3n + 1)$-probleem bewijzen? De lezer ziet zijn (voor)oordeel bevestigd dat wiskundigen wat wereldvreemde mensen zijn. Zo berekende William Feller dat een tafel niet door de deur kon. Na zijn berekening bleek dat het zijn vrouw wel gelukt was.
Kenmerkend voor de popularisering van de wiskunde is dat wiskundige vraagstukken dikwijls geïntroduceerd worden met verhalen. Ook in dit boek komt dit vaak voor. Soms past het in de context van een wiskundig vraagstuk, maar vaak wordt deze aanpak er met de haren bijgesleept. Het in voorbeeld 2 gegeven probleem wordt in het boek ingeleid met: 'In de Grote Hemelse Getallenfabriek, waar alle getallen worden gemaakt, houden de accountants bij hoeveel keer elk cijfer van 0 tot 9 gebruikt wordt, ...'
De vertaling van het boek vanuit het Engels is niet foutloos, maar bevat gelukkig minder begripsfouten en slordigheden dan de vertaling van het eerste deel. Op blz. 47 luidt de vertaling: '... de *lengten* van vlakken ...'; op blz. 99 staat: 'Dit betekent dat $f$ een of andere regel definieert, die voor iedere deelverzameling van $x$, leidt tot een bepaald getal $f(x)$''. Maar het gaat hier echter over punten $x$ in een vlak. Dit zijn begripsfouten. De volgende fout (blz. 205) zullen we dan maar een slordigheidsfout noemen: 'twee kwadraten (niet 0) kunnen opgeteld geen kwadraat opleveren'. En Pythagoras dan?

### Voor wie is dit boek bestemd?

Binnen het kader van vaktijdschrift *Euclides* denken we natuurlijk vooral aan de leerlingen en de wiskundedocenten. Dit boek kan een uitgangspunt zijn voor de keuze van een onderwerp voor een profielwerkstuk, te meer omdat vaak verwezen wordt naar websites voor verdieping. Zo kun je dan, zoekend op internet, interessante, uitdagende en horizon verbredende zaken tegenkomen. In dit verband is de op blz. 103 vermelde uitspraak van de logicus Leon Henkin vermeldenswaard:

‘Een van de grote misverstanden over wiskunde die we in onze klaslokalen bedrijven, is dat de leraar altijd het antwoord weet op ieder probleem dat wordt besproken. Dit wekt bij leerlingen de gedachte op dat er ergens een boek moet zijn met alle correcte antwoorden op alle interessante vragen en dat leerkrachten die antwoorden kennen. En als je nu dat boek te pakken zou kunnen krijgen, dat je dan helemaal klaar bent. Dat gaat zo tegen de werkelijke aard van de wiskunde in.’ Ook dit boek voldoet daar niet aan, maar laat wel zien dat er meer wiskunde is dan de schoolwiskunde. Zie daarom de – **na dit artikel verder uitgewerkte** – voorbeelden voor een indruk.

## Voorbeelden

**Voorbeeld 1** – Het stangenmechanisme van Peaucellier is een mooi historisch voorbeeld hoe een meetkundig principe in de techniek toegepast kan worden.
**Voorbeeld 2** – Een probleem, oplosbaar zonder veel wiskundige voorkennis. In dit probleem moet onderzocht worden of een getal van 10 cijfers en de bijbehorende frequentietabel van de in dat getal voorkomende cijfers corresponderen, als de frequentietabel opgevat wordt als een getal.
**Voorbeeld 3** – ‘Arnolds Kat’ is een voorbeeld hoe in deze tijd van computers nieuwe gebieden van de wiskunde betreden worden en hoe onderdelen van de wiskunde samenhangen. Vladimir Arnold (1937-2010) was een vooraanstaande Russische wiskundige, die ook het onderwijs in de wiskunde ter harte ging. Zijn opvattingen hierover zijn misschien wel controversieel, maar wel het overdenken waard (zie: *http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html*). Hij heeft in 1988 een eredoctoraat ontvangen van de universiteit van Utrecht en is daar ook gasthoogleraar geweest.

## Noot [Red.]

[1] Zie de bespreking van dit boek door Bert Zwaneveld, eveneens in dit nummer van *Euclides*: pp. @@-@@ **{{aanpassen}}**.

## Verantwoording

- Voor het tekenen van de figuren is gebruik gemaakt van de geregistreerde programma’s Cabri II Plus 1.4 en Cinderella 2.
- De in het besproken boek genoemde websites en de daarin vermelde verwijzingen zijn, voor zover van toepassing, door de recensent geraadpleegd.

## Literatuur


- Brannan, D.A. , Esplen, M.F., & Jeremy J. Gray (1999). *Geometry*. The Open University: Cambridge University Press.
- Coxeter, H.S.M. (1969). *Introduction to Geometry*. Wiley Classics Library.
- Needham, T. (1998). *Visual Complex Analysis*. Oxford: Clarendon Press.
- Siersma, D. (2012). Poincaré and Analysis Situs, the beginning of algebraic topology. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/13(3), 196-200. *http://igitur-archive.library.uu.nl/math/2013-0304-200635/UUindex.html*


## Over de recensent


Drs. Chris van der Heijden was, tot aan zijn pensionering, conrector en docent wiskunde van de voormalige scholengemeenschap voor mavo, havo en vwo CSG Blaise Pascal te Spijkenisse.
E-mailadres: *chris-van-der-heijden@wxs.nl*

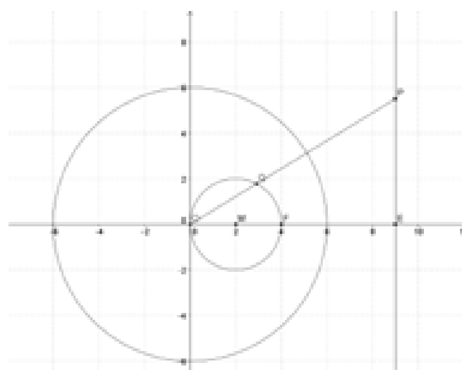

# UITWERKING VAN DRIE VOORBEELDEN

## UIT PROFESSOR STEWART’S SCHATKAMER

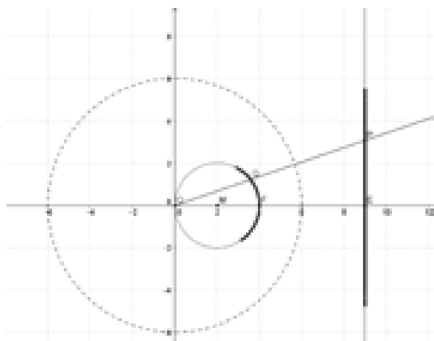

Chris van der Heijden


### Stangenmechanisme van Peaucellier

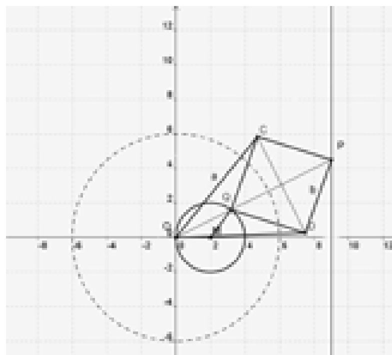
(blz. 197) De werking van het stangenmechanisme van Peaucellier berust op het principe van de cirkelinversie, een gegeneraliseerde versie van de lijnspiegeling. De inverse van een punt $P$ t.o.v. een cirkel met middelpunt $O$ en straal $R$ (de basiscirkel) is het punt $Q$ waarvoor geldt dat $OQ \times OP = R^2$ waarbij $O$, $P$ en $Q$ collineair zijn. Deze afbeelding is involutorisch omdat $P$ en $Q$ elkaars beeld zijn. Zo zijn in ***figuur 1*** de punten $E$ en $F$ en de punten $P$ en $Q$ elkaars ‘spiegelbeeld’ in de basiscirkel met straal $R = 6$. Kennen we aan de lijn $x = 9$ een punt $\infty$ [punt op oneindig; oneigenlijk punt; red] toe, dan zijn $\infty$ en het punt $O$ ook elkaars spiegelbeeld. Hier wordt de lijn $x = 9$ afgebeeld op de cirkel met middelpunt $M$ die door $O$ gaat. Algemeen geldt bij een cirkelinversie dat gegeneraliseerde



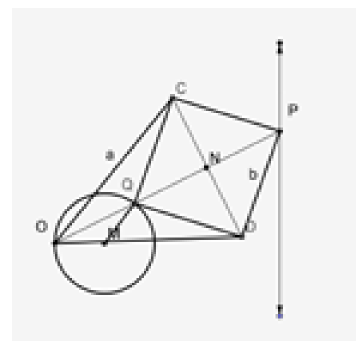
figuur 1



figuur 2



figuur 3




figuur 4

cirkels (dat zijn cirkels én rechte lijnen) afgebeeld worden op gegeneraliseerde cirkels. De punten op de basiscirkel zijn dekpunten, en lijnen door de oorsprong en cirkels die de basiscirkel loodrecht snijden, worden op zichzelf afgebeeld, maar *niet* puntsgewijs.

Om het stangenmechanisme van Peaucellier te begrijpen, is vooral het geschetste geval in figuur 1 van belang. Als het punt $P$ zich over de lijn $x = 9$ beweegt binnen zekere grenzen, dan beschrijft $Q$ een cirkelboog met straal $MQ$ en middelpunt $M$. Zo wordt een lineaire beweging omgezet in een roterende beweging of omgekeerd een roterende beweging in een lineaire beweging; ***zie figuur 2***.
Bij de rechtlijnige beweging van $P$ verandert de lengte van $OP$. Om dit meetkundige principe geschikt te maken voor technische toepassingen moet deze variatie in lengte opgevangen worden. De Franse ingenieur Peaucellier heeft hiervoor in 1864 een elegante oplossing gevonden; ***zie figuur 3***.

De variatie van de lengte van lijnstuk $OP$ wordt mogelijk gemaakt door een stangenmechanisme, bestaande uit 2 lange stangen met lengte $a$ en 4 korte stangen met lengte $b$. Samen vormen zij een vlieger met toppen $O$ en $P$ en een ruit $PDQC$. Lijnstuk $OP$ is de symmetrieas van deze figuur. Als $P$ zich rechtlijnig naar boven beweegt, wordt de vlieger steeds smaller; $C$ en $D$ naderen tot elkaar en in het grensgeval komt $Q$ op $OC$ te liggen en $P$ op het verlengde van $OC$. De afstand van $O$ tot $Q$ is dan $a - b$ en de afstand van $O$ tot $P$ wordt $a + b$. Omdat $P$ en $Q$ elkaars inverse moeten zijn t.o.v. van de basiscirkel met straal $R = 6$, geldt nu dat $OP \times OQ = (a + b)(a - b) = R^2 = 36$. We bewijzen nu dat dit ook geldt voor de andere punten $P$ binnen hun bereik. Een mogelijk keuze voor $a$ en $b$ is: $a = 7{,}5$ en $b = 4{,}5$; ***zie figuur 4***.
Het bewijs verloopt als volgt.
$OQ = ON - NQ$; $OP = ON + NP$; $NQ = NP$
**(1)...** $OQ \times OP = ON^2 - NQ^2$
$ON^2 = OC^2 - CN^2 = a^2 - CN^2$
$NQ^2 = QC^2 - CN^2 = b^2 - CN^2$
**(2)...** $ON^2 - NQ^2 = a^2 - b^2$
Uit (1) en (2) volgt:
$OQ \times OP = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = R^2$

Voor $a = 7{,}5$ en $b = 4{,}5$ wordt dit: $R^2 = (7{,}5)^2 - (4{,}5)^2 = 36 = 6^2$.

**Wanneer is een getal van tien cijfers identiek aan de frequentietabel van de in het getal voorkomende cijfers?**
(blz. 189) Om deze vraag duidelijk te maken hierbij een voorbeeld waarbij dit *niet* het geval is; zie onderstaande tabel.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **getal** | | | | | 4 | 7 | 4 | 0 | 4 | 5 |
| cijfer | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| cijferfrequentie | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Het getal moet uit tien cijfers bestaan en moet beginnen met een cijfer ongelijk 0. Er is precies één antwoord mogelijk.

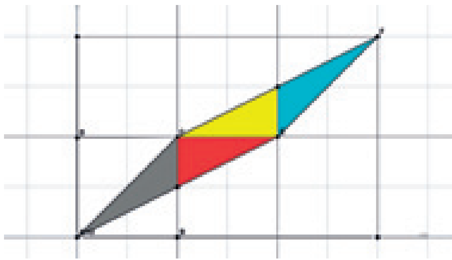
## Wiskundige katten

(blz. 78 en 79) Onder deze titel wordt, naast andere kattenverhalen, 'Arnolds Kat' aangestipt, de meest interessante kat omdat een verbinding wordt gelegd tussen algebraïsche topologie, chaostheorie, een dynamisch systeem en lineaire algebra, waarbij hulp van de computer een rol speelt.
Uitgangspunt is de afbeelding gedefinieerd door:

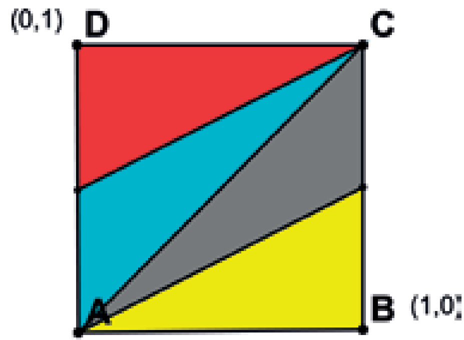
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y \end{pmatrix} \quad \text{mod (1)}$$

De lineaire afbeelding $(x, y) \rightarrow (2x + y\ ,\ x + y)$ beeldt het vierkant $ABCD$ met zijden 1 af op het parallellogram $AEFC$; ***zie figuur 5a***. Elk van de vier driehoeken binnen het parallellogram heeft een oppervlakte gelijk aan ¼. De oppervlakte van het parallellogram is dus gelijk aan de oppervlakte van het vierkant. Geldt dit voor elke figuur, met name een figuur binnen het vierkant? Ja, want de determinant van deze lineaire afbeelding heeft de waarde 1. De eigenwaarden van de matrix kunnen we vinden uit de karakteristieke vergelijking
$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$.
De eigenwaarden zijn:

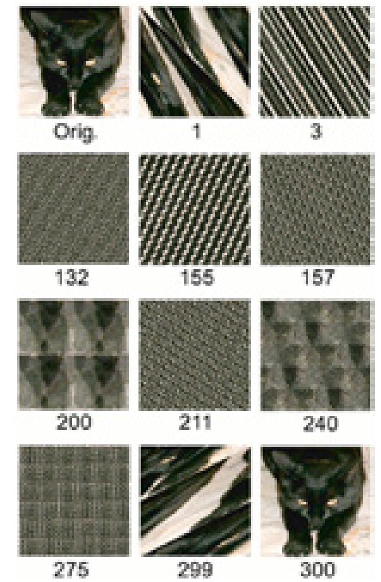
$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\ ;\ \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$



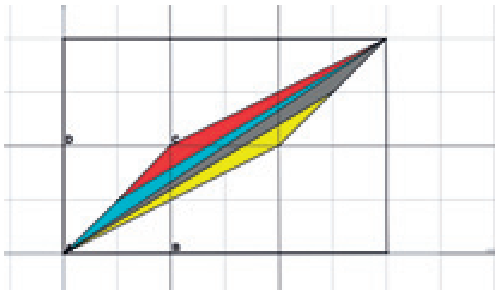
figuur 5a



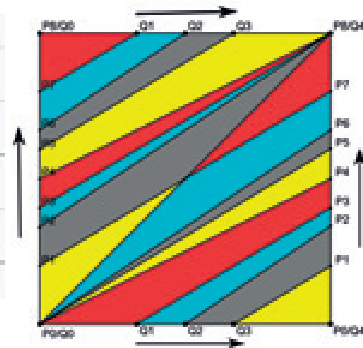

figuur 5b




figuur 7 Iteratie toegepast op een plaatje van 150x150 pixels. De getallen geven het aantal iteratiestappen aan. Bron: WikipediA – Claudio Rocchini (2006) – Creative Commons Attribution 2.5.



figuur 6a



figuur 6b

De respectievelijke eigenruimten zijn de lijnen met vergelijking:
$y = \phi^{-1} \cdot x$ en $y = -\phi \cdot x$
waarbij $\phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ de verhouding van de *gulden snede* is.

Vervolgens passen we de volgende afbeelding toe:

$$\begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{mod }(1)} \begin{pmatrix} 2x+y-[2x+y] \\ x+y-[x+y] \end{pmatrix}$$

Simpel gezegd: het grootste gehele getal dat in $2x + y$ bevat is, trekken we van $2x + y$ af.
Is $2x + y$ een positief getal, dan houden we het decimale deel – het deel achter de komma – over. Ditzelfde doen we met $x + y$. Meetkundig betekent dit dat de driehoeken buiten vierkant *ABCD* terug geplaatst worden in vierkant *ABCD*; ***zie figuur 5b***. Het vierkant wordt nu geheel overdekt door driehoeken.

Dit proces kunnen we herhalen; ***zie figuur 6a***. De figuur die dan ontstaat – ***zie figuur 6b*** – heeft duidelijk een chaotischer karakter.
Als we de punten $P_0$ t/m $P_8$ aan elkaar lijmen, krijgen we een cilinder (slang). Rekken we deze 'slang' uit en lijmen we de punten $Q_0$ t/m $Q_4$ aan elkaar, dan krijgen we een torus (band). De vier punten $P_0/Q_0$, $P_0/Q_4$, $P_8/Q_4$ en $P_8/Q_0$ vallen dan samen. Sommige lijnen slingeren zich nu als lussen om de torus heen om uiteindelijk weer bij het beginpunt terug te keren.
Een voorbeeld is de lus: $P_0/Q_0 \rightarrow P_4 \rightarrow P_8/Q_4 = P_0/Q_0$.
Gaan we door met herhalen, dan krijgen we een iteratief proces gedefinieerd door:

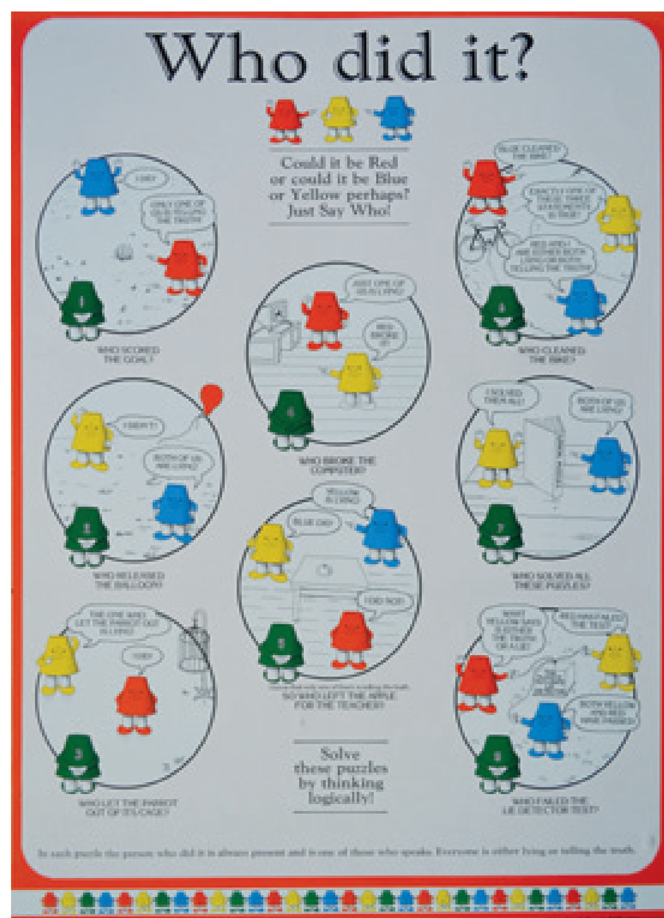
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{mod } (1)$$

Dit proces kan op elk punt van een digitale foto uitgevoerd worden. Het beeld van de kat in ***figuur 7*** wordt chaotisch, maar de kat komt na 300 iteraties toch weer op haar pootjes terecht.

# POSTERBESPREKING

## WHO DID IT?

Simon Biesheuvel




Bovenstaande leuke, kleurrijke poster heb ik gekocht omdat ik vernieuwde wiskunde C (cTWO) geef op het VWO, waar logisch redeneren bij hoort. Bij VWO wiskunde A gebruiken we logisch redeneren als keuzeonderwerp.

Op de poster staan 8 problemen en onderaan staan de antwoorden. Onderaan staat ook de zin: 'Everyone is either lying or telling the truth'. Volgens een docent Engels en ook een broer uit Canada betekent dit dat 'of iedereen liegt of iedereen de waarheid spreekt'. Maar dan zijn er 5 problemen die onoplosbaar zijn. Maar als we de zin anders interpreteren, namelijk als: 'voor iedereen apart geldt: hij liegt of spreekt de waarheid', zodat het mogelijk is dat de één liegt, terwijl de ander de waarheid spreekt, dan zijn alle problemen oplosbaar en kloppen ze met de antwoorden.

Als voorbeeld bekijken we probleem 3. De vraag is: wie heeft de papegaai uit zijn kooi gelaten?
Het gele figuurtje zegt: 'Degene die de papegaai uit de kooi liet, liegt.' Het rode figuurtje zegt: 'Ik heb het gedaan.'
Om dit op te lossen, nemen we eerst aan dat wat geel zegt, waar is. Daaruit volgt: als rood het gedaan heeft, liegt hij, maar omdat rood juist zegt dat hij het gedaan heeft, deed rood het dus niet. Dat kan niet. Als geel het gedaan heeft, volgt uit de aanname dat geel liegt. Maar de aanname is dat geel de waarheid spreekt. De aanname kan dus niet waar zijn.
Er moet dus wel gelden: wat geel zegt, is niet waar. Dus degene die het gedaan heeft, spreekt de waarheid. Als geel het gedaan heeft, spreekt hij dus de waarheid, maar we hadden gezien dat dat niet klopt. Als rood het gedaan heeft, spreekt die dus de waarheid en dat klopt wel. Dus rood heeft het gedaan.

Er is één probleem dat twee mogelijke antwoorden geeft. Heb je dus een oplossing gevonden, dan moet je wel verder kijken of er meer mogelijk is. Interessant is ook dat de aanname dat bijvoorbeeld rood liegt, soms wel eens hetzelfde oplevert als de aanname dat rood juist de waarheid spreekt. Dat is erg verrassend.

Als alle problemen op de poster opgelost zijn, kun je ook nog uitzoeken welke problemen onoplosbaar worden met de regel dat óf alle figuurtjes liegen óf alle figuurtjes de waarheid spreken. Dit is best wel lastig en een leuke uitdaging.

Een nadeel van deze poster in je lokaal is dat ook leerlingen uit bijvoorbeeld 4 vwo wiskunde B (die geen logica krijgen) het oplossen leuker vinden dan hun gewone huiswerk...

Hij is te koop op: *http://www.tarquingroup.com/tabs/posters.php?main=Posters*

### Over de recensent

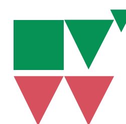
Simon Biesheuvel is docent aan het Willem de Zwijger College in Bussum.
E-mailadres: *biesheuvel@zonnet.nl*



# JAARVERGADERING/ STUDIEDAG 2013

## TWEEDE UITNODIGING

Marianne Lambriex



**Agenda**
10:00-10:50 uur – **Huishoudelijk gedeelte**
1. Opening door de voorzitter, mevr. M. Kollenveld.
2. Jaarrede door de voorzitter.
3. Notulen van de jaarvergadering 2012 (zie het volgende nummer van *Euclides*).
4. Jaarverslagen NVvW en *Euclides* (zie het volgende nummer van *Euclides*).
5. Verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie.
6. Bestuursverkiezing. Bestuurslid J. Gademan is aftredend en stelt zich niet herkiesbaar. De bestuursleden M.A. Lambriex-van der Heijden en C. Boudri zijn aftredend en stellen zich herkiesbaar. Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen tegenkandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden. Het bestuur nodigt leden van harte uit zich te melden wanneer zij belangstelling hebben voor een plaats in het bestuur (bijvoorbeeld via *secretaris@nvvw.nl*).
7. Rondvraag. Leden die een vraag in de rondvraag willen stellen, wordt verzocht deze vóór aanvang van de vergadering in te dienen bij de secretaris (*secretaris@nvvw.nl*).
8. Sluiting van de jaarvergadering.

Dit is de tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2013 van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* op **zaterdag 9 november 2013**.
Aanvang – 10:00 uur
Sluiting – 16:00 uur
Plaats: **Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal**

### Programma Studiedag:

| | |
|---|---|
| 10:50-11:00 | Inleiding op de studiedag |
| 11:00-11:45 | Plenaire lezing |
| 11:45-12:00 | Koffie |
| 12:00-13:00 | Workshopronde 1 |
| 13:00-14:00 | Lunchpauze, marktbezoek |
| 14:00-15:00 | Workshopronde 2 |
| 15:00-15:20 | Koffie |
| 15:20-16:00 | Plenaire voordracht |
| 16:00-16:10 | Afsluiting |

### Themagedeelte Krachtig vooruit met wiskunde!

De vernieuwingen binnen het (wiskunde)onderwijs blijven op ons afkomen. We zetten ze centraal op de studiedag en samen met u bekijken we hoe we daarmee krachtige, nieuwe impulsen aan het onderwijs kunnen geven. Uiteraard zijn daar de plannen van cTWO voor de eindexamenprogramma's havo/vwo waarvan de invoering nu echt dichterbij gaat komen. Een krachtige voorbereiding op de inhoud en de onderliggende ideeën die doorklinken in 'Denken & doen' via professionalisering lijkt zeker geen overbodige luxe. Het klinkt positief en we hebben er zin in om met mooie programma's verder te komen. Dat geldt zeker ook voor de tussendoelen (onderbouw vmbo/havo/vwo). Daarnaast liggen er ook veel kansen om de didactiek aan te passen aan de nieuwe mogelijkheden die ICT biedt. Bij al die vernieuwingen staat voorop dat we onze leerlingen aan het *denken* willen krijgen waarbij het *doen* uiteraard een nodige voorwaarde is om het *denken* te ondersteunen.

**Werkgroepen** – We zijn blij dat we 25 werkgroepen kunnen aanbieden die mooi verdeeld zijn over nieuwe examenprogramma's en professionalisering daarbij, lesmaterialen waarbij nieuwe technologie wordt ingezet, didactiek en de categorie

'diversen' met onder andere twee werkgroepen rond dyscalculie. Zeker 8 van de 25 werkgroepen zijn zeer geschikt voor het vmbo.

**Plenair** – De plenaire lezing past bij de 'denken-doen' thematiek. Martin Kindt zal putten uit zijn rijke ervaring als creatief ontwerper van les- en oefenmaterialen en ons meenemen in het zoeken naar een balans tussen denken en doen. De titel van zijn presentatie is: *Uitvinden en Oefenen*.
Zoals gebruikelijk houden we de afsluitende plenaire presentatie nog even geheim.
Zoals u ziet, bieden we een vol en gevarieëerd programma en beloofd het weer een interessante dag te worden. De omschrijvingen van de workshops worden, net als vorig jaar, op de site van de NVvW gepresenteerd, tegelijkertijd met het uitkomen van dit nummer van *Euclides*.
De eindverantwoordelijke voor het themagedeelte zijn Henk van der Kooij (e-mailadres: *h.vanderkooij@uu.nl*) en Lidy Wesker-Elzinga (e-mailadres: *L.J.B.Elzinga@uva.nl*).

## De LIO-dag

Intussen is de LIO-dag een succesvolle traditie geworden: een speciaal programma voor de studenten van de lerarenopleidingen, met name de lio'ers. Het ochtend gedeelte gaat over hun afstudeerscriptie met pas afgestudeerden als sprekers en in de middag nemen ze deel aan het themagedeelte.

## Nieuwe leden

De studiedag is een uitstekende gelegenheid voor het bestuur om persoonlijk kennis te maken met de nieuwe leden. Dat vindt plaats met een hapje en een drankje en een praatje tijdens de lunchpauze. Daarvoor nodigen we de nieuwe leden van harte uit. In de loop van oktober ontvangen de nieuwe leden hiervoor een persoonlijke uitnodiging via de e-mail.

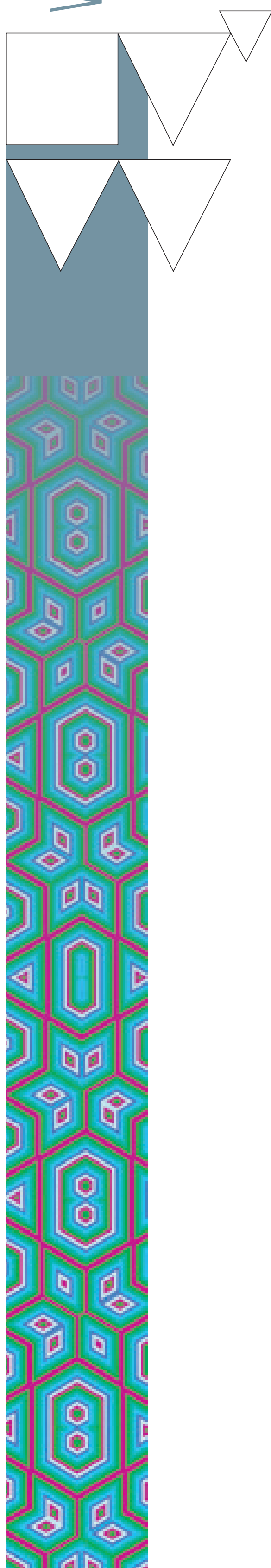
## Kosten

De studiedag is gratis voor leden. *Leden: maak (nog) eens reclame voor de vereniging en breng een collega-niet-lid mee!* Niet-leden zijn welkom tegen betaling van een bijdrage in de kosten van € 70,00 (deze kosten kan de school betalen uit de nascholingsgelden en zijn als vakbondscontributie op te voeren!). Hiermee zijn zij, als ze daarvoor belangstelling hebben, tevens gratis lid van de vereniging tot 1 augustus 2014, inclusief alle faciliteiten, waaronder de 7 nummers van de lopende jaargang van *Euclides*, gratis toegang tot examenbesprekingen in het voorjaar en mogelijkheid tot deelname aan de verenigingswerkgroepen. Ook studenten zijn welkom, zij betalen € 35,00. Wie een lunch bestelt betaalt daarvoor € 10,00.

## Aanmelding

Aanmelding dient tijdig te geschieden **vóór 20 oktober 2013**.
Vorig jaar melden zich nog 96 enthousiaste deelnemers na de sluiting van aanmelding. Dat leverde voor de organisatie wederom veel problemen op. Bij onvoldoende deelnemers bij de voorinschrijving van een werkgroep zal deze niet doorgaan. De werkgroepleiders stellen hun tijd en inzet gratis ter beschikking en het is dan teleurstellend om voor 2 personen een lange trip te moeten maken. Voor de organisatie (ook vrijwilligers) is het van belang dat u zich op tijd aanmeldt. Dit jaar gaat de aanmelding weer geheel *digitaal* via de nieuwe site van de vereniging. Daarop staat het volledige programma, de workshops waar u een keuze uit kunt maken. Het aanmeldingsformulier leidt u door de vragen. Leden die een lunch willen gebruiken maken

BIJ AL DIE VERNIEUWINGEN STAAT VOOROP DAT WE ONZE LEERLINGEN AAN HET DENKEN WILLEN KRIJGEN WAARBIJ HET DOEN UITERAARD EEN NODIGE VOORWAARDE IS OM HET DENKEN TE ONDERSTEUNEN.



het voor hen geldende bedrag over op bankrekeningnummer 143917 ten name van NVvW te Dronten. Betaalt u via een gezamenlijke- of schoolrekening of onder een andere naam, vermeld dan ook de volledige deelnemersnaam, adres en woonplaats. Het voor u geldende bedrag kunt u aflezen uit de volgende tabel.

| | **zonder lunch** | **met lunch** |
|---|---|---|
| **Lid** | gratis | € 10,00 |
| **Niet-lid** | € 70,00 | € 80,00 |
| **Student (niet-lid)** | € 35,00 | € 45,00 |

De plaatsing in werkgroepen geschiedt in de twee laatste weken in volgorde van binnenkomst van aanmelding. Anders dan in voorgaande jaren wordt de indeling een paar dagen voor de studiedag op de site gepubliceerd; aan het begin van de studiedag ontvangt u een badge met uw plaatsingsgegevens. Ter plaatse aanmelden is mogelijk, echter niet wenselijk omdat het bijwonen van een werkgroep afhankelijk is van de beschikbare ruimte.

De eindverantwoordelijke voor de indeling in de workshops zijn Henk en Arja Bijleveld (e-mailadres: *henk.bijleveld@gmail.com*).

## Markt

Naast alle workshops is er ook een uitgebreide markt waar u uw hart kunt ophalen aan boeken, rekenmachines, spellen, wiskunst en alle wiskundemethodes. Er is zowel een commercieel gedeelte als ook een niet-commercieel deel. Verantwoordelijk voor deze markt is Ruud Jongeling (e-mailadres: *rj.jongeling@kpnmail.nl*).

## Certificaat

De NVvW heeft de mogelijkheid om nascholingscertificaten uit te reiken, die u kunt gebruiken met betrekking tot *registerleraar.nl*. Wilt u een certificaat ontvangen, vermeld dan bij uw aanmelding ook uw voorletters en uw geboortedatum.
U kunt uw certificaat na afloop van de studiedag (vanaf 15:45 uur) in ontvangst nemen, op vertoon van een geldig identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele studiedag heeft meegemaakt. Certificaten worden niet nagestuurd.

## Informatie

Verantwoordelijk voor de organisatie en contactpersoon van deze dag is Marianne Lambriex (e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*) en zij wordt bijgestaan door Marjan Botke.
Bij onbereikbaarheid of noodgeval Kees Lagerwaard (tel. 026-3813646 / e-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*).

# PUZZEL 89-1

Wobien Doyer
Lieke de Rooij

# RECREATIE(VE) CREATIES

Om aan het begin van het nieuwe schooljaar uw telvaardigheid eventueel wat op te frissen, starten we het jaar met het tellen van het aantal verschillende zin- of onzinwoorden die u kunt maken met permutaties van alle negen letters uit het woord 'RECREATIE'. We noemen dat hier verder 'CREATIES'.
De berekening dat er zonder verdere voorwaarden $\frac{9!}{2!3!}$ verschillende CREATIES zijn, is een opgave uit het 'schoolboekje' die we u natuurlijk niet zullen voorleggen. Maar opgave 1 zou u aan uw leerlingen kunnen vragen, eventueel met een kleine hint.

**Opgave 1** – Bereken het aantal verschillende CREATIES waarbij er nergens twee letters R naast elkaar staan.

Ook voor de volgende opgave is een formule bekend, maar niet in het schoolboekje.

**Opgave 2** – Bereken het aantal verschillende CREATIES waarbij er nergens twee letters E naast elkaar staan.

Voor de volgende opgaven zult u zelf een handige systematiek moeten bedenken.

**Opgave 3** – Bereken het aantal verschillende CREATIES waarbij er nergens twee gelijke letters naast elkaar staan.

**Opgave 4** – Nu plaatsen we de letters in een vierkant van 3 bij 3. Gelijke letters mogen niet naast elkaar staan, niet horizontaal, niet verticaal en niet diagonaal. Hoeveel verschillende CREATIES zijn er met deze randvoorwaarden?

Het is natuurlijk mogelijk dat u de antwoorden met een computerprogramma bepaalt, maar het is wel de bedoeling dat u een rekenmethode beschrijft die is uit te voeren zonder computer of zelfs rekenmachine. Uw geprogrammeerde antwoorden kunnen dan een controle zijn.

**Opgave 5** – En ten slotte gaan we de sudokuverslaafden onder u stimuleren een oplossing in te sturen. Voor deze opgave mogen gelijke letters weer wel naast elkaar staan.
U plaatst in elke rij, in elke kolom en in elk vet omlijnd blokje van 3 bij 3 een CREATIE. Anders dan bij de bekende sudoku's komen er meerdere gelijke tekens in een rij of kolom. Maakt dat het moeilijker of juist gemakkelijker? In elk geval net iets anders dan de sudoku-routiniers gewend zijn.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | R | | | | | | T | |
| | I | | | | | | | C |
| | | | | T | | R | R | |
| | R | E | C | | R | | | |
| | | R | | A | | R | | |
| | | | E | I | | | | |
| A | | E | | | T | | | E |
| | | | | | | I | | |
| | | | A | | | | | E |

## Inzenden oplossingen

Oplossingen kunt u mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of opsturen naar L. de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer maximaal 20 punten verdienen en u kunt weer extra punten verdienen door bruikbare ideeën voor een nieuwe puzzel in te sturen.
De persoon die het hoogst op de ladder staat, ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. De deadline is **14 oktober a.s.**

We wensen u veel plezier.

PUZZEL 88-6

# CONSTRUCTIE VAN EN UIT DE OUDE DOOS

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Deze puzzel start met een driehoek uit de oude doos van Ton Lecluse en eindigt met een constructie van de maten van een optimale doos voor Ton op basis van die driehoek. Er waren dertien inzendingen.

Gegeven: driehoek $ABC$ met $BC = a = 7$, $AC = b = 5$, $AB = c = 8$ en de bissectrices $BE$ en $CF$, met snijpunt $S$.

**Opgave 1** – Bewijs dat $|SE| = |SF|$. Zie voor een mooi bewijs het artikel van Ton Lecluse in dit nummer (opgave 1).

Een aantal inzenders heeft berekend dat $|SE| = |SF| = \frac{2}{3}\sqrt{7}$. Harm Bakker deed dat met analytische meetkunde en Frits Göbel met formules uit zijn privé 'oude doos':

$$|ES| = \frac{b}{a+c}\sqrt{\frac{ac(s-b)}{s}} \text{ en } |FS| = \frac{c}{a+b}\sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}}, \text{ met } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

Deze formules zijn onder andere af te leiden met behulp van de bissectricestelling ($AF : FB = b : a$) en de cosinusregel. Hiermee is het niet noodzakelijk eerst te ontdekken dat $\angle A = 60°$.

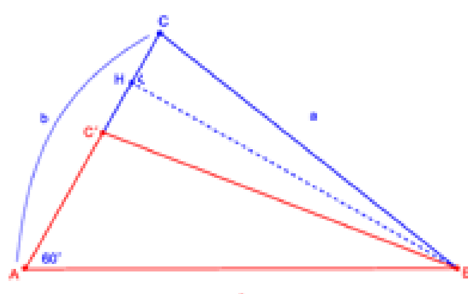
**Opgave 2** – Aan welke eis moeten niet-gelijkbenige driehoeken minimaal voldoen opdat $|SE| = |SF|$ en bewijs dat.
De eis is: $\angle A = 60°$. Enkele inzenders noemden ten onrechte ook een hoek van 120°.
We moeten dus bewijzen: $|SE| = |SF| \Leftrightarrow \angle A = 60°$. Voor $\Leftarrow$ zie artikel Ton Lecluse.
Resteert nog het bewijs $\Rightarrow$
De meeste inzenders gebruikten de loodlijntjes uit $S$, maar dat is niet nodig. In driehoek $ASE$ en driehoek $ASF$ geldt namelijk de eigenschap *zzh*. Maar dan geldt $\angle AES = \angle AFS$ òf ze zijn samen 180°. Bij gelijkheid volgt echter dat driehoek $ABC$ gelijkbenig is ($b = c$). Dus $\angle AES + \angle AFS = 180°$ en dus ook $\angle A + \angle ESF = 180°$. Omdat $\angle ESF = 90° + ½\angle A$ (Zie artikel Ton Lecluse) volgt: $\angle A = 60°$. q.e.d.

**Opgave 3** – De stomphoekige partner van driehoek $ABC$ met $|SE| = |SF|$ (dus $\angle A = 60°$) werd gedefinieerd als de driehoek met twee zijden gelijk aan die van driehoek $ABC$, waarbij weer $|SE| = |SF|$. Toon aan: Als de zijden van driehoek $ABC$ geheeltallig zijn, dan zijn die van de stomphoekig partner dat ook.
Veronderstel dat $b < c$. Zo niet, verwissel dan $B$ en $C$.
De meeste inzenders trokken de hoogtelijn $BH$ en spiegelden $C$ in die lijn (= $C'$).
De gevraagde partner is dan driehoek $ABC'$. (***zie figuur 1***, rood)
Meerdere inzenders zagen dat $|AC'| = c - b$. Bewijs: $AH = c/2 \rightarrow CH = b - c/2 \rightarrow AC' = b - 2(b - c/2) = c - b$. Het is dan evident dat als $b$ en $c$ geheel zijn, ook $c - b$ geheel is en dat als $\angle C$ scherp is, dan is $\angle C'$ stomp. q.e.d.
Bekend zijn ook formules om alle geheeltallige tripletten te genereren[1], waarbij $\angle A = 60°$ : bijvoorbeeld: $a : b : c = (m^2 - mn + n^2) : (m^2 - n^2) : (2mn - n^2)$

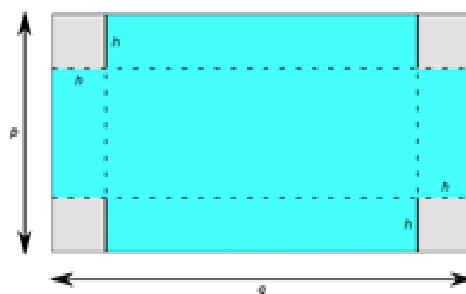
**Opgave 4 en 5** – Bereken (4) en construeer (5) de hoogte $h$ van de grootste doos, gemaakt uit een rechthoekig stuk karton van $p$ bij $q$ (***zie figuur 2***). Deze opgave werd door enkelen genoemd als een leuke opgave voor de onderbouw, waar door uitproberen en grafiek de beste oplossing moet worden gezocht. Maar met differentiëren vond

eenieder: $h = \frac{p+q-x}{6}$, waarbij $x = \sqrt{p^2+q^2-pq}$. Bijna alle inzenders herkenden

dat $x$ ook bij de driehoek met $\angle A = 60°$ voorkomt als zijde $a$, de link met de driehoek uit de oude doos. En dan is de constructie niet moeilijk:
Construeer driehoek $ABC$ met $\angle A = 60°$ met $b = p$ en $c = q$. Dan geldt $c = x$. Bepaal $p + q - x$ en deel dat door 6. Dat laatste kan met hulp van een ander lijnstuk dat al in zes gelijke stukjes is verdeeld. Als toegift vermeldde Hans Linders dat met de driehoek van Lecluse volgt: $h = 1$.




figuur 1




figuur 2

## Noot

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Integer_triangle#Integer_triangles_with_a_60.C2.B0_angle

## Ladderstand

| | |
|---|---|
| G. Riphagen | 131 |
| J. Remijn | 125 |
| H. Klein | 98 |
| H. Linders | 93 |
| K. Vugs | 89 |
| F. Göbel | 82 |
| R. Stolwijk | 75 |
| K. van der Straaten | 72 |
| J. Meerhof | 67 |
| J. Verbakel | 58 |

De ladderprijs is gewonnen door Gerhard Riphagen. Hartelijk gefeliciteerd daarmee!

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

**Redactie**
Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Dick Klingens
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

**Inzending bijdragen**
Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

**Richtlijnen voor artikelen**
Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast. Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

**Realisatie**
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

**Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren**
Website: www.nvvw.nl

**Voorzitter**
Marian Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04 E-mail: voorzitter@nvvw.nl

**Secretaris**
Kees Lagerwaard, Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46 E-mail: secretaris@nvvw.nl

**Ledenadministratie**
Elly van Bemmel-Hendriks, De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

**Helpdesk rechtspositie**
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg Tel. (0345) 531 324

**Lidmaatschap**
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie. Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

**Abonnementen niet-leden**
Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00
Instituten en scholen: € 145,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00
Betaling per acceptgiro.

**Advertenties en bijsluiters**
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. t.a.v. E. van Dijk
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl

# KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-leraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur:
E-mail redactie@nvvw.nl
Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html

**JAARGANG 89**

| nr. | verwachte verschijningsdatum | deadline |
|---|---|---|
| 1 | 17 september 2013 | 24 juni 2013 |
| 2 | 5 november 2013 | 2 september 2013 |
| 3 | 17 december 2013 | 28 oktober 2013 |
| 4 | 7 februari 2014 | 2 december 2013 |
| 5 | 25 maart 2014 | 27 januari 2014 |
| 6 | 13 mei 2014 | 17 maart 2014 |
| 7 | 24 juni 2014 | 6 mei 2014 |

**do 19/09** AMERSFOORT
NVORWO Jaarvergadering en studiemiddag 2013

**vr/za 25/26 10** UTRECHT
Masterclass 'Diophantische Vergelijkingen'
Organisatie Bètasteunpunt Utrecht

**za 9/11** VEENENDAAL
Jaarvergadering/Studiedag 2013
Organisatie NVvW
Zie ook pag. 317 in Euclides 88(6) en pag. 36-39 in dit nummer

**vr 22/11** ZWOLLE
ELWIeR Conferentie 2013

**za 11/01** UTRECHT
KWG Wintersymposium 2014
Mathematics of Planet Earth.
Organisatie KWG

**do/vr 16/17 01** NOORDWIJKERHOUT
Panama-conferentie
Organisatie FSW, UU

**vr/za 31/01 01/02** NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie FIsme

**wo 02/04** OP DE SCHOLEN
Grote Rekendag
Organisatie FIsme

Advertentie
Casio
1/1